

Les Sommes		3 Somme géométrique.	4
1 Les Sommes classiques.	1	4 Dominos ou Somme Télescopique.	5
2 Opérations.	2	5 Somme du binôme.	6
2.1 Opérations "simples".	2	6 Majorer/minorer/Encadrer une somme.	7
2.2 Ré-indexation	3		

Théorème 1. Combien d'entier !
Il y a la formule générale
nbr de terme = Fin - Début +1

1 Les Sommes classiques.

On peut écrire une somme de deux façons différentes

> Présentation développée avec $\cdots$, CàD $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

> Avec le symbole $\sum$, CàD $\sum_{k=1}^n a_k$ ou $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ ou $\sum_{1 \leq j \leq n} a_j$ ou $\sum_{\ell \in \{1,2,\dots,n\}} a_\ell$

Définition 2. $\sum_{k=1}^n$ signifie : On somme de $k = 1$ à $k = n$

Dans une somme,

> il faut bien comprendre le rôle et le sens de l'indice **Fantôme** de sommation.

> Il faut être capable de jongler entre «Présentation développé» et «symbole $\sum$ »

Exercice 1. [Correction] Écrire les sommes suivantes avec un symbole $\sum$ ou développer

$$S_1 = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}$$
$$S_2 = 2^{n-1} + 3^2.2^{n-2} + 3^4.2^{n-3} + \cdots + 3^{2n-2}$$
$$S_3 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2018} \frac{1}{k^2}$$
$$S_4 = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$$

$$S'_3 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2018} \frac{1}{k^2}$$

Rappel : $\mathcal{P}$ c'est l'ensemble des nombres premiers

Exercice 2. [Correction] On considère les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. Déterminer les signe de $U_{n+1} - U_n$ et de $V_{n+1} - V_n$.
2. Montrer que : $V_n - U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

2 Opérations.

2.1 Opérations "simples".

Théorème 3.

Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $b_0, b_1, \dots, b_n$ des complexes, on a

> Les sommes classiques

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 = \text{le nombre de plateau}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + \square = \frac{\square(\square + 1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \square^2 = \frac{\square(\square + 1)(2\square + 1)}{6}$$

> Regrouper, distribuer.

On peut regrouper et distribuer les sommes finies

$$\sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$$

> Factoriser.

On peut factoriser.

$$\sum_{k=0}^n (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{avec } \lambda \text{ ne dépend pas de } k$$

> Disjonction pair-impair.

On a

$$\sum_{k=0}^n a_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{tous } k=0}^n a_k = \sum_{k \text{ pair}} a_k + \sum_{k \text{ impair}} a_k$$

$$\text{avec } \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n a_k = a_0 + a_2 + a_4 + \dots \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n a_k = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$$

Démonstration : Les démonstrations sont évidentes dès que l'on détaille les sommes sous forme développées

$$\sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n b_k = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) - (b_0 + b_1 + \dots + b_n) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) + \dots + (a_n - b_n) = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k)$$

$$\sum_{k=0}^n (\lambda a_k) = \lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \lambda \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{\substack{k=0 \\ \text{tous}}}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n = (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) + (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)$$

Exercice 3. [Correction] Calculer les sommes et les produits suivants

$$\sum_{k=1}^n k + 1 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^n k \right) + 1, \quad \sum_{k=1}^n (k+1), \quad \sum_{k=n}^{3n} (3k-1), \quad \sum_{i=0}^n i(i+2), \quad \sum_{k=1}^{2n} \max(k, n)$$

$$\prod_{k=1}^n (2k \cdot 2^k), \quad \prod_{k=1}^n (-2)^k$$

Exercice 4. [Correction] On admet dans cette exercice que les sommes infinies se manipulent comme des sommes finies.

Sachant que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et $S'_3 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

2.2 Ré-indexation

Définition 4.

Une ré-indexation consiste à changer l'indice de sommation
mais la somme, elle, ne change pas.

Exemple.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère que $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$

Je ré-indexe la somme avec $k = n + 1 - p$,

On sait que $S = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{k=n} k$
 et on remplace k par $n + 1 - p$, ainsi

$$S = \sum_{k=1}^{k=n} k = \sum_{n+1-p=1}^{n+1-p=n} \underbrace{\hspace{1cm}}_{k=n+1-p} = \sum_{p=n}^{p=1} (n+1-p)$$

$$\begin{aligned} \text{Conclusion : } S &= \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{k=n} k \\ &= \sum_{p=n}^{p=1} (n+1-p) \end{aligned}$$

On remet les bornes en croissant

$$= \sum_{p=1}^n (n+1-p)$$

La ré-indexation est finie et le calcul se poursuit

$$\begin{aligned} S = 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \sum_{k=1}^n k = \sum_{p=1}^n (n+1-p) \\ &= \text{On distribue} \\ &= \sum_{p=1}^n (n+1) - \sum_{p=1}^n p \\ &= \text{On calcule les sommes} \\ &= (n+1) \times \text{nbr de plateau} - S \\ &\implies 2S = (n+1)n \implies S = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Exercice 5. [Correction] Ré-indexation

1. Soit la somme $A_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

Ré-indexer avec $k = n - p$ puis en déduire la valeur de $A_n = \sum_{k=1}^n k$.

2. Soit la somme $B_n = \sum_{k=1}^n k 2^k$.

Re-indexer avec $k = p + 1$ puis en déduire la valeur de $B_n = \sum_{k=1}^n k 2^k$.

3 Somme géométrique.

Théorème 5. L'indispensable formule des sommes géométrique

$$\text{Lorsque } q \neq 1, \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 6. [Correction]

1. Calculer les sommes suivantes

$$1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n} \quad 1 - q + q^2 - q^3 + \dots + (-1)^n q^n \quad 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots + 2^n$$

2. Soit $x \in \mathbb{C}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k, \quad \sum_{k=0}^n (2^{2k+n} \cdot 3^{n-3k}), \quad 2^{n-1} + 3^2 \cdot 2^{n-2} + 3^4 \cdot 2^{n-3} + \dots + 3^{2n-2}$$

3. Calculer les produits suivants $\prod_{k=1}^n (2k \cdot 2^k), \quad \prod_{k=1}^n (-2)^k$

Exercice 7. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Exercice 8. À l'aide des sommes géo, montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Exercice 9. [Correction] Rappel : On sait que $2017 = 7 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3$

$$\text{Calculer } \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}} \text{ puis } 1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}}$$

Exercice 10. [Correction] Soit $x \in \mathbb{C} - \{1\}$. On va avec différentes méthodes, calculer $\sum_{k=0}^n kx^k$

1. Méthode 1. Montrer que : $\sum_{k=0}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$.

2. Méthode 2. Finir le calcul suivant

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n kx^k &= 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} \\ &= [x]' + [x^2]' + [x^3]' + \dots + [x^n]' \\ &= \dots \end{aligned}$$

3. Méthode 3. Re-indexer la somme avec $k = p + 1$ puis conclure.

4 Dominos ou Somme Télescopique.

Exemple 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe a, b tel que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{k+1}$

Q2. En déduire la valeur de S_n .

Q3. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle?

Théorème 6. Synthèse de la méthode.

$$S_n = \sum_{Début}^{fin} \underline{\text{Plateau}} = \text{On modifie le plateau avec l'indication du texte.}$$

$$= \text{On détaille les "nouveau" plateaux}$$

$$= \text{On simplifie}$$

Exercice 11. Montrer qu'il existe a, b, c tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$
 En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 12. À l'aide des domino, montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Exercice 13. [\[Correction\]](#) Simplifier $(n+1)^3 - n^3$.

En déduire le calcul de $\sum_{k=1}^n k^2$

5 Somme du binôme.

Définition 7. Coefficient du binôme d'ordre n, k

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, CàD $0 \leq k \leq n$

Le coefficient du binôme d'ordre n, k est le nombre : $\binom{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Théorème 8. Propriétés des coefficients du binôme.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

> À savoir :

Les coefficients sont des entiers et on a $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n$

> Triangle de Pascal et formule du pochoir.

Les coefficients se disposent en triangle et on a la formule $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

> Propriétés de la ligne n du triangle.

- *début-fin* : La ligne n est de la forme : $1, n, \dots, n, 1$
- *Symétrie* : On a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
- *Maximum* : Les coefficients sont croissants de $k=0$ à $k=n/2$ et décroissante de
Conséquence : le plus gros coefficient est donc au milieu

Formule(s) du Binôme de Newton.

Soit $\square, a, b \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$(1 + \square)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \square^k \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 14. [\[Correction\]](#) Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x^k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^k$$

Exercice 15. [\[Correction\]](#)

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ tous}}}^n \binom{n}{k}$.

2. En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, Calculer

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \dots \text{ et } \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} \dots$$

6 Majorer/minorer/Encadrer une somme.

Théorème 9. Comment majorer une somme

On considère la somme $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n \underbrace{Bof_k}_{\text{plateau } n^k}$

> Étape 1. Pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,
on majore $\underbrace{Bof_k}_{\text{plateau } n^k} \leq M_k$ avec *Wiking* ou *Q1*

> Étape 2. On somme l'inégalité de $k = 0$ à $k = n$

Ainsi $\sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n M_k$
 $\leq$ On calcule la somme

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 1$. On sait que : $t^n - 1 = (t - 1) [t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1]$

Montrer que : $t^n - 1 \leq n t^{n-1} (t - 1)$

Exercice 17. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} \leq H_{2n} - H_n \leq 1$

Exercice 18. [\[Correction\]](#) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n$

Exercice 19. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que : $\forall n \geq 2, \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq 2$.
3. La suite (S_n) converge-t-elle ?

Exercice 20. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{3^k + 1}{3^k} \right)$

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq 3/2$
3. La suite (S_n) converge-t-elle ?

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On a

$$> S_1 = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k.$$

$$> S_2 = 2^{n-1} + 3^2 \cdot 2^{n-2} + 3^4 \cdot 2^{n-3} + \dots + 3^{2n-2} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k} (3^2)^k$$

$$> S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On simplifie la partie commune.

$$= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+2} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{k=n+1}$$

$$= \frac{(2n+2) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

La suite (U_n) est croissante.

$$V_{n+1} - V_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

On simplifie la partie commune.

$$= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+2} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{k=n}$$

$$= \frac{2n(n+1) + n(2n+1) - 2(2n+1)(n+1)}{2n(2n+1)(n+1)} = \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} < 0$$

La suite (V_n) est décroissante.

$$V_n - U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On simplifie la partie commune.

$$= \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Les sommes

$$> \sum_{k=1}^n k + 1 = \left[\sum_{k=1}^n k \right] + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

$$> \sum_{k=1}^n (k+1) = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$> \sum_{k=n}^{3n} (3k-1) = 3 \sum_{k=n}^{3n} k - \sum_{k=n}^{3n} 1 = 3 \left[\frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} \right] - 1(3n-n+1)$$

$$> \sum_{i=0}^n i(i+2) = \sum_{i=0}^n (i^2 + 2i) = \sum_{i=0}^n i^2 + 2 \sum_{i=0}^n i$$

$$> \sum_{k=1}^{2n} \max(k, n) = \sum_{k=1}^n \max(k, n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \max(k, n) = \sum_{k=1}^n n + \sum_{k=n+1}^{2n} k$$

Les Produits

$$> \prod_{k=1}^n (2k \cdot 2^k) = \underbrace{2 \cdot 2^1}_{2 \cdot 2^1} \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2^2}_{2 \cdot 2 \cdot 2^2} \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 2^3}_{2 \cdot 3 \cdot 2^3} \dots \underbrace{2 \cdot n \cdot 2^n}_{2 \cdot n \cdot 2^n} = 2^n n! 2^{1+2+3+\dots+n}$$

$$\text{De plus } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$> \prod_{k=1}^n (-2)^k = \underbrace{(-2)}_{(-2)} \underbrace{(-2)^2}_{(-2)^2} \underbrace{(-2)^3}_{(-2)^3} \dots \underbrace{(-2)^n}_{(-2)^n} = (-1)^{1+2+3+\dots+n} 2^{1+2+3+\dots+n}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) On a

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \text{On réindexe avec } k=2p \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24} \end{aligned}$$

De plus $\sum_{\text{tous}}^{\infty} \dots = \sum_{\text{pair}}^{\infty} \dots + \sum_{\text{impair}}^{\infty} \dots$, ainsi

$$\sum_{\text{impair}}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{\text{tous}}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{\text{pair}}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

$A_n =$ Voir exemple du cours.

$$B_n = \sum_{k=1}^n k 2^k$$

On réindexe avec $p = k+1$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) 2^{p+1}$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} (p+1) 2^p 2$$

$$= 2 \sum_{p=0}^{n-1} p 2^p + 2 \sum_{p=0}^{n-1} 2^p$$

$$= 2 \left[B_{n-1} + \underbrace{0}_{p=0} \right] + 2 \times (\text{Somme Géo})$$

$$= 2 \left[B_n - \underbrace{n 2^n}_{p=n} \right] + 2 \times \frac{1-2^n}{1-2}$$

On en déduit la valeur de B_n

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. On a

$$> 1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n}. \text{ On applique la formule avec } \square = q \text{ et } 2n.$$

$$> 1 - q + q^2 - q^3 + \dots + (-1)^n q^n = 1 + \square + \square^2 + \dots + \square^n \text{ avec } \square = -q.$$

On applique la formule.

$$> 1 + \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \dots + 2^n = 1 + \square + \square^2 + \dots + \square^{2n} \text{ avec } \square = \sqrt{2}.$$

On applique la formule avec $\square = \sqrt{2}$ et $2n$.

2. On a

$$> \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^n (-x)^k = 1 + \square + \dots + \square^n$$

$$> \sum_{k=0}^n (2^{2k+n} \cdot 3^{n-3k}) = \sum_{k=0}^n 2^n (2^2)^k 3^n (3^{-3})^k = 2^n 3^n \sum_{k=0}^n (2^2 3^{-3})^k = 2^n 3^n (1 + \square + \dots + \square^n) \quad \text{avec } \square = 4/27$$

$$> 2^{n-1} + 3^2 \cdot 2^{n-2} + 3^4 \cdot 2^{n-3} + \dots + 3^{2n-2} = \sum_{k=0}^{n-1} [2^{n-1-k}, 3^{2k}] \text{ puis on continue comme ci-dessus.}$$

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}} = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1} = \frac{1-10^n}{1-10} = \frac{10^n-1}{9}$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 11 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}} = \sum_{k=1}^n \frac{10^k - 1}{9}$$

$$= \frac{1}{9} \left[\sum_{k=1}^n 10^k - \sum_{k=1}^n 1 \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{10^{n+1} - 1}{9} - n \right] = \frac{10^{n+1} - 9n - 1}{9^2}$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. Récurrence.
- 2.

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} &= [x]' + [x^2]' + [x^3]' + \dots + [x^n]' \\ &= [x + x^2 + x^3 + \dots + x^n]' \\ &= [x(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1})]' \\ &= \left[x \left(\frac{1-x^n}{1-x} \right) \right]' \end{aligned}$$

3. Voir exercice 4.

Solution de l'exercice 13 (Énoncé)

$$\text{On a } \forall k \in \mathbb{N}, (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

On somme l'égalité de $k=1$ à $k=n$ ainsi

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{(k+1)^3 - k^3}_{\text{Domino}} = \sum_{k=1}^n \underbrace{3k^2 + 3k + 1}_{\text{Domino}}$$

$$> \text{À Gauche : } \sum_{k=1}^n [(k+1)^3 - k^3] = \text{Domino} = (n+1)^3 - 1^3.$$

$$> \text{À Droite : } \sum_{k=1}^n [3k^2 + 3k + 1] = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\text{Conclusion : } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 - 1 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \right] = \dots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé) On a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{\square}^k = (1 + \square)^n \quad \text{avec } \square = -x$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k - \underbrace{x^{n+1}}_{k=n+1} = (1+x)^{n+1} - x^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x^k &= \text{On réindexe avec } p = k+1 \\ &= \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} x^{p-1} = x^{-1} \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} x^p = \frac{1}{x} \left[\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p - \underbrace{1}_{p=0} \right] = \frac{1}{x} [(1+x)^n - 1] \end{aligned}$$

Remarque : le calcul est valide pour $x \neq 0$.

La situation particulière $x = 0$ est facile à traiter

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

1. On a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k = (1+1)^n = 2^n$.
2. À l'aide d'une disjonction Pair-Impair, on a

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad 0 = (1-1)^n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$$

$$\text{Ainsi on trouve } \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Solution de l'exercice 18 (Énoncé)

1. Différence.
2. J'applique l'inégalité avec $1, 2, 3, \dots, n$ ainsi on obtient

$$\ln(2) - \ln(1) \leq 1/1$$

$$\ln(3) - \ln(2) \leq 1/2$$

$$\ln(4) - \ln(3) \leq 1/3$$

.....

$$\ln(n) - \ln(n-1) \leq 1/(n-1)$$

$$\ln(n+1) - \ln n \leq 1/n$$

Puis on somme les inégalités.