TD 2 Calculs, Récurrence, Fonction.

Mercredi 17 Septembre 2024.

Calculs, Récurrence

Exercice 1. Manipulation de l'angle moitié

En utilisant l'angle moitié, déterminer Re $\left(\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$

Exercice 2. Manipulation des objets.

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$

   Déterminer le signe $u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n!}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$.

   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 3. On admet que $(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,a\,b^2 + b^3$

1. En déduire une expression de $\cos(3\theta) = \text{Re}\left(e^{i3\theta}\right) = \text{Re}\left(\left[e^{i\theta}\right]^3\right) = \text{Re}\left(\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]^3\right)$.

2. En déduire une expression de $\cos^3(\theta) = \left[\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right]^3$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$.

Exercice 4. Récurrence

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$

2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1],\ (1-x)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nx}$

Inégalité

Exercice 5. [Correction] Montrer que : $\forall\, x \in [1,2]\,,\quad \dfrac{x}{\sqrt{2x-1}} \leqslant \sqrt{2}$

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$

$$\text{et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) = f\left(u_n\right)$$

1. Identifier la fonction f puis montrer que la fonction f est croissante sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$

2. Montrer que la fonction f est ${}^1/_2$ -lipschitzienne sur $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$.

Exercice 7. Calculez les dérivée des expressions suivantes

- $\dfrac{5}{x^5} - \dfrac{3}{x^2}$
- $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$
- e^{3-x^2}
- $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $10^{\sqrt{x}}$
- $e^{x^2} = e^{(x^2)}$
- $\ln\left(\dfrac{2x}{x+2}\right)$
- $\sqrt[3]{x}$
- $\dfrac{e^{2x}}{x^2}$
- $(x^2+3x-2)^4$
- $e^{-1/x}$
- $(1-x^2)^n$

Correction.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) Direct + quantité conjuguée.