

Exo 1. Autour de $\sqrt{a}$.

Définition de $\sqrt{a}$. Propriétés évidentes de $\sqrt{a}$ et pourquoi sont-elle évidentes.

Démonstration de : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Montrer que : $\forall x \geq 0, \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$

Exo 2. Les fonctions cosh et sinh.

Définition de cosh et sinh.

Variation de la fonction cosh.

Démonstration de $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

Exo 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $a = \frac{2^{2^n}}{2^{2^n} - 1}$. Calculer $b = \frac{a^2}{2a - 1}$

Exo 4. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ \sinh(x) = x$.

Correction

Exo 4. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ \sinh(x) = x$.

Pour tout*chaque $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f \circ \sinh(x) = f(\sinh(x)) = \ln \left(\sinh(x) + \sqrt{\sinh^2(x) + 1} \right)$$

Or on sait que : $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

$$= \ln \left(\sinh(x) + \sqrt{\cosh^2(x)} \right)$$

Attention : $\sqrt{\square^2} = |\square| \neq \square$

$$= \ln \left(\sinh(x) + |\cosh(x)| \right)$$

On sait que : $\cosh(x) \geq 1 > 0$ donc $|\cosh(x)| = \cosh(x)$

$$= \ln \left(\sinh(x) + \cosh(x) \right)$$

$$\text{Enfin : } \sinh(x) + \cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x$$

$$= \ln \left(e^x \right) = x$$