Exercice 1. [Correction] On considère la suite (I_n) vérifiant

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \; et \; \forall\, n \in \mathbb{N},\; I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\binom{2n+2}{n+1}$ en fonction de $\binom{2n}{n}$.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\; I_n = \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$

Exercice 2. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$, et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+1}$$

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\; u_n \leqslant n^2$.

Exercice 3. [Correction] On admet les formules de dérivations suivantes.

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2} \qquad\qquad [\arctan f]' = f' \frac{1}{1+f^2}$$

Soit h la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par : $\forall\, x \in \mathscr{D},\; h(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

En utilisant les formules admises ci-dessus, calculer et simplifier $h'(x)$.

Exercice 4. Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \in \{1, .., n\}$. On considère $u_k = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$

1. Simplifier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ puis justifier que : $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire que : $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\},\; u_k \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

Exercice 5. [Correction] On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. Simplifier $a_{n+1} - a_n$.
2. Simplifier $b_{n+1} - b_n$.
3. En déduire (par récurrence) que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\; a_n = b_n$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

On va montrer par récurrence $H_{<n>}\ :\ I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

$>$ Initialisation.

On a $\dfrac{(2\times 0)!}{2^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ donc $H_{<0>}$ est vraie

$>$ Hérédité.

On suppose $H_{<n>}$

$\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } I_{n+1} = \dfrac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\dfrac{\pi}{2}}$

On chemine

$$\begin{aligned}
I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n &= \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+2)}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2n+2)!}{2.2(n+1)(n+1)2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2(n+1))!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \qquad \textit{Fini.}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) On fait par récurrence (à 2 étages)

$$H_{<n>} : u_n \leqslant n^2$$

$>$ Initialisation avec $n=1$ et $n=2$

On a $u_1 = 1 \leqslant 1^2$ et $u_2 = u_1 + \dfrac{a_0}{0+1} = 2 \leqslant 2^2$ OK

$>$ Hérédité. On suppose $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

On va montrer $H_{<n+2>}$
CàD $u_{n+2} \leqslant (n+2)^2$

On a : on a $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+1}$

On applique $H_{<n>}$ *et* $H_{<n+1>}$

$$\leqslant (n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1} \quad Fini$$

Méthode rapide et astucieuse

On a : $$\begin{aligned}Intermédiaire = (n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1} &\leqslant (n^2+2n+1) + \frac{n^2}{n+0}\\ &= n^2+3n+1\\ &\leqslant n^2+4n+4 = (n+2)^2 = Final \quad Fini\end{aligned}$$

Méthode classique

On a : $$\begin{aligned}Final - Inter = (n+2)^2 - \left[(n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1}\right] &= 2n+3-\frac{n^2}{n+1}\\ &= \frac{(2n+3)(n+1)-n^2}{n+1}\\ &= \frac{n^2+5n+3}{Bas>0} > 0\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On trouve

$$\forall x \in \mathscr{D}',\ f'(x) = \left[\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]' = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Simplifier $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ puis justifier que : $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

On a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1}{n^{k+1}}\binom{n}{k+1}}{\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}} = \frac{n^k}{n^{k+1}} \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{1}{n}\frac{n-k}{k+1}$$

On a

$$G - p = \frac{1}{2} - \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n(k+1)-2(n-k)}{n(k+1)} = \frac{n(k-1)+2k}{n(k+1)} \geqslant 0 \quad {\scriptstyle \text{car } k\geqslant 1}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. On a

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{-1}{2n+2}}_{k=2n+1} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \sum_{k=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \underbrace{\frac{-1}{n+1}}_{k=n+1} + \sum_{k=n+2}^{2n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}
\end{aligned}$$

3. La récurrence est facile car $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} - a_n = b_{n+1} - b_n$