TD 3 Calcul de somme et Produit.

Mercredi 24 Septembre 2025.

Exercice 1. [Correction] Calculer les sommes/produit suivants

1. Calculer : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i(i+2)$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{3n}(3k-1)$, *Bonus* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\max(k,n)$
2. Soit $x \in \mathbb{C}^*$. Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{k=0}^{n}\left(2^{2k+n}.3^{n-3k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\, x^k$$
3. Calculer les produits suivants $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(2k.2^k\right)$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(-2)^k$

Exercice 2. [Correction] Simplifier $(n+1)!-n!$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$

Classique.

Exercice 3. [Correction] Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n\,x^{2n}+\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \ln(n+1)-\ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \ln(n+1) \leqslant H_n$

Exercice 5. [Correction] On admet *dans cette exercice* que les sommes infinies se manipulent comme des sommes finies.

Sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$, calculer $A = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ k\ pair}}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ et $B = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ k\ impair}}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

Bonus

Exercice 6. [Correction] Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$

En déduire, *à l'aide d'un télescopage*, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 7. [Correction] Soit $x \in \mathbb{C}-\{1\}$. L'objectif est de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$

1. Méthode 1.

   Montrer, par récurrence, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.
2. Méthode 2. Astuce. En utilisant la ré-indexation $k=p+1$.
3. Méthode 3. La bonne méthode est de remarquer que : $[x^k]' = k\,x^{k-1}$ ainsi $kx^k = x\,[x^k]'$.

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) On a

1. On a

$$> \sum_{k=n}^{3n}(3k-1) = 3\sum_{k=n}^{3n} k - \sum_{k=n}^{3n} 1 = 3\left[\frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}\right] - 1(3n-n+1)$$

$$> \sum_{i=0}^{n} i(i+2) = \sum_{i=0}^{n}(i^2+2i) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + 2\sum_{i=0}^{n} i$$

$$> \sum_{k=1}^{2n} \max(k,n) = \sum_{k=1}^{n} \max(k,n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \max(k,n) = \sum_{k=1}^{n} n + \sum_{k=n+1}^{2n} k$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(2^{2k+n}.3^{n-3k}) &= \sum_{k=0}^{n} 2^n\,(2^2)^k\,3^n\,(3^{-3})^k \\
&= 2^n 3^n \sum_{k=0}^{n}(2^2\,3^{-3})^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \square^k \qquad \textit{avec } \square = \frac{2^2}{3^3} \\
&= \frac{1-\square^{n+1}}{1-\square} = \frac{1-\left(\frac{2^2}{3^3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2^2}{3^3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,x^k &= \sum_{k=0}^{n}(-x)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \square^k \qquad \textit{avec } \square = -x \\
&= \sum_{k=1}^{n} \square^k - \underbrace{1}_{k=0} \\
&= \frac{1-\square^{n+1}}{1-\square} - 1 = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} - 1
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\left(2k.2^k\right) &= \underbrace{2.1.2^1}_{k=1}\underbrace{2.2.2^2}_{k=2}\underbrace{2.3.2^3}_{k=3}\cdots\underbrace{2.n.2^n}_{k=n} \\
&= (2.2...2)\ (1.2.3....n)\ \left(2^1.2^2.2^3....2^n\right) \\
&= 2^n\ n!\ 2^{1+2+3+....+n} \\
&= 2^n\ n!\ 2^{n(n+1)/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(-2)^k &= \underbrace{(-1)^1\,2^1}_{k=1}\ \underbrace{(-1)^2\,2^2}_{k=2}\ \underbrace{(-1)^3\,2^3}_{k=3}\cdots\underbrace{(-1)^n\,2^n}_{k=n} \\
&= (-1)^{n(n+1)/2}\,(2)^{n(n+1)/2}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Simplifier $(n+1)! - n!$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$

Pour tout/chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! - n! = n.n!$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(k+1)!-k!}\\
&= \underbrace{2!-1!}_{k=1}+\underbrace{3!-2!}_{k=2}+\underbrace{4!-3!}_{k=3}+\cdots+\underbrace{(n+1)!-n!}_{k=n}\\
&\qquad \text{Télescopage}\\
&= (n+1)!-1
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$

pour tout/chaque $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\square^k+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} \qquad \textit{avec } \square=-x^2\\
&= \frac{1-\square^{n+1}}{1-\square}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\\
&= \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\\
&= \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}+(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=1\\ k\ pair}}^{\infty}\frac{1}{k^2} &= \textit{ On ré-indexe avec } k=2p\\
&= \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{4p^2}=\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

De plus $\sum_{tous}^{\infty}\cdots=\sum_{pair}^{\infty}\cdots+\sum_{impair}^{\infty}\cdots$, ainsi

$$\sum_{impair}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{tous}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{pair}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

Déterminer $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1)(k+2)+bk(k+2)+c(k(k+1))}{k(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{a[k^2+3k+2]+b[k^2+2k]+c[k^2+k]}{k(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{k^2[a+b+c]+k[3a+2b+c]+[2a]}{k(k+1)(k+2)}
\end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité espérée, je choisis

$$\begin{cases} a+\ \ b+c=0\\ 3a+2b+c=0\\ 2a \qquad\quad\ =1\end{cases} \iff a={}^1/_2\,,\ b=-1,\ c={}^1/_2$$

Ainsi on a : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{{}^1/_2}{k}+\dfrac{-1}{k+1}+\dfrac{{}^1/_2}{k+2}$

En déduire, *à l'aide d'un télescopage*, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2} \\
&= \underbrace{\frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{3}}_{k=1} + \underbrace{\frac{1/2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{4}}_{k=2} + \underbrace{\frac{1/2}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{1/2}{5}}_{k=3} + \cdots \\
&\quad \textit{Télescopage} \\
&= \underbrace{\frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2}}_{\text{reste du plateau k=1}} + \underbrace{\frac{1/2}{2}}_{\text{reste du plateau k=2}} + \underbrace{\frac{1/2}{n+1}}_{\text{reste du plateau k=n-1}} + \underbrace{\frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}}_{\text{reste du plateau k=n}}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) On a

1. facile
2. Méthode 2. On a

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{k=1}^{n} k\, x^k \\
&\quad \textit{On ré-indexe avec } p = k+1 \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} (k+1)\, x^{k+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} (k+1)\, x^k\, x \\
&= x \sum_{p=0}^{n-1} k\, x^k + x \sum_{p=0}^{n-1} x^k \\
&= x\, S_{n-1} + x \times (Somme\ Géo) \\
&= x\,(S_n - n\, x^n) + x \times (Somme\ Géo) \\
&\quad \textit{On en déduit la valeur de } S_n
\end{aligned}$$

3. Méthode 3. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} x\,[x^k]' \\
& x \sum_{k=1}^{n} x\,[x^k]' \\
&= x \left[\sum_{k=1}^{n} x^k \right]' \\
&= x \left[\sum_{k=0}^{n} x^k - \underbrace{1}_{k=0} \right]' \\
&= x \left[\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 \right]'
\end{aligned}$$