Programme de colle de la semaine 3

du Lundi 29 Septembre au Vendredi 03 Octobre.

Questions de cours. Questions de cours.

> Ré-indexation. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

En re-indexant avec $k = p + 1$, montrer que $B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

> Une somme.

Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3}\right)$

> Télescopage. Pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère $a_n = n^2(n+1)^2$

Simplifier $a_{k+1} - a_k$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^3$

> Avec la clef. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On considère $S_n = \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k}$

Calculer $(a - b)S_n$ puis S_n.

> Binôme.

Énoncer les formules du binôme de Newton "simple" et "généralisée".
Démontrer la formule généralisée, en admettant la formule simple.

> Je le fais Lundi. Somme géo. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.

Puis $\mathrm{Re}(S_n)$ la partie réelle de S_n

> Majorer-minorer-encadrer une somme Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Montrer que la suite (u_n) est croissante, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Montrer que la suite (u_n) est majorée par 1, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \frac{1}{k} \leqslant 1$.

> Majorer-minorer-encadrer une somme Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) - \ln n \leqslant {}^1/_n$.
En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant H_n$

> Suite arithmético-géo.

Énoncer et démontrer le théorème des suite arithmético-géo.
Pour la démonstration : On trouve avec le théorème la valeur de u_n puis on le démontre par récurrence.

Exercices.

Des calculs de somme.