Nom Lundi 29 Septembre.

Exo 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

En re-indexant avec $k = p+1$, montrer que $B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exo 2.

Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3}\right)$

Exo 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Montrer que la suite (u_n) est croissante, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Montrer que la suite (u_n) est majorée par 1, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \frac{1}{k} \leqslant 1$.

Exo 4.

Énoncer et démontrer le théorème des suite arithmético-géo.

Pour la démonstration : On trouve, avec le théorème, la valeur de u_n puis on le démontre par récurrence.

Exo 1. Soit la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Re-indexer avec $k = p+1$ puis en déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Exo 2.

Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3}\right)$

Démontrer à l'aide d'un télescopage que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{3(n+1)}{n+3}\right)$

Exo 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Montrer que la suite (u_n) est croissante, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Montrer que la suite (u_n) est majorée par 1, CàD $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 1$.

Exo 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ avec $e^{i\theta} \neq 1$

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, puis $\mathrm{Re}(S_n)$ la partie réelle de S_n