Exercice 1. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right)$

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

   En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \frac{2}{3}$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 2. [Correction] On considère la suite (S_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant n^4$.
2. On admet que : $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$

   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \leqslant S_n \leqslant \frac{n+1}{2n}$
3. En déduire que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite.
4. On va démontrer l'encadrement admis.
   (a) Justifier que : $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin(x) \leqslant x$

   (b) Démontrer que : $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$

   Indication : Étudier une fonction et dériver suffisamment

Exercice 3. [Correction] On considère la suite (s_n) définie par : $s_0 = 2\ et\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k$

1. Généralités
   (a) Calculer s_1, s_2 et s_3.
   (b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$.
   (c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ s_n \geqslant 2$.
2. Une somme
   (a) Pour tout n, simplifier $\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1}$

   (b) En déduire une simplification de $\sum_{k=0}^{N} {}^1/_{s_k}$

   (c) En déduire la valeur $\sum_{k=0}^{\infty} {}^1/_{s_k} \overset{def}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} {}^1/_{s_k}$

Facultatif et plus difficile.

Exercice 4. [Correction] L'inégalité de Hölder.

Commentaires

La question 1 : Un gros calcul.
La question 2 n'est pas si dur MAIS il faut manipuler utiliser Q1 et les V.A.
La question 3 difficile.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, .., x_n, y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.
Soit $(p, q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

1. Soient $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, démontrer que le minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction

$$h : t \longmapsto a^p \, \frac{t^{-1/q}}{p} + b^q \, \frac{t^{1/p}}{q} \quad \text{vaut } ab.$$

2. En déduire que pour tout $t > 0$: $\displaystyle \left|\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i\right| \leqslant \frac{t^{-1/q}}{p} \, \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{t^{1/p}}{q} \, \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$

3. En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Remarque : avec $p = q = 2$, cette inégalité s'appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leqslant \underbrace{x}_{Tangente}$

En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \dfrac{2}{3}$.

$>$ Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$

on a $\ln\left(\dfrac{3^k+1}{3^k}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{3^k}\right) \leqslant \dfrac{1}{3^k}$ car $\dfrac{1}{3^k} > 0$

$>$ On somme l'inégalité de $k=1$ à $k=n$,

$$\begin{aligned}
\textit{Ainsi } u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{3^k}\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \square^k\right) - 1 \qquad avec\ \square = 1/3 \\
&\leqslant \frac{1-\square^{n+1}}{1-\square} - 1 \\
&\leqslant \frac{1-\left({}^1/_3\right)^{n+1}}{1-\left({}^1/_3\right)} - 1 \\
&\leqslant \frac{1-0}{1-\left({}^1/_3\right)} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \sin\left(\frac{1}{3^k}\right) - \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{3^k}\right) \\
&= \sin\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) = \sin(\square) \geqslant 0 \textit{ car } \square = \frac{1}{3^{n+1}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée par $\dfrac{2}{3}$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant n^4.$

   "Facile" par récurrence.

2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{1}{6n^2} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n+1}{2n}$

   > Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$. On applique l'encadrement admis avec $x = {}^{k}/_{n^2}$ on a bien $n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

   $$\text{ainsi } \frac{k}{n^2} - \frac{\left({}^{k}/_{n^2}\right)^3}{6} \leqslant \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

   > On somme de $k = 1$ à $k = n$ ainsi

   $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6\,n^6}\right]}_{Gauche} \leqslant S_n \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}\right]}_{Droite}$$

   De plus

   $$Droite = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

   $$Gauche = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6\,n^6}\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{6\,n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \geqslant \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6\,n^6}\,n^4 = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6\,n^2}$$

3. En déduire que la suite (S_n) converge et déterminer sa limite.

   On a facilement $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6\,n^2} = \frac{1}{2}$.

   Conclusion : d'après le théorème des 2 gendarmes, la suite (S_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

4. Démontrer que : $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$

   On étudie la fonction $h : x \longmapsto \sin(x) - \left[x - \dfrac{x^3}{6}\right]$

   > La fonction h est dérivable sur $\mathscr{D} = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

   > $\forall\, x \in \mathscr{D},\ h''''(x) = \sin(x) \geqslant 0$

   > On fait plein de bô tableau

   Conclusion : $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ h(x) \geqslant 0$ Fini

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Généralités

   (a) On a $s_1 = 3$, $s_2 = 7$ et $s_3 = 43$.

   (b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$.

   $$\text{Pour tout } n\text{, on a } s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k$$
   $$= 1 + s_0 s_1 s_2 ... s_{n-1} s_n$$
   Or $s_{\square+1} = 1 + \prod_{k=0}^{\square} s_k$

   Donc on a $s_n = 1 + s_0 s_1 s_2 ... s_{n-1}$

   On ré-organise, ainsi $s_0 s_1 s_2 ... s_{n-1} = s_n - 1$
   $$= 1 + (s_n - 1)s_n = s_n^2 - s_n + 1$$

   (c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ s_n \geqslant 2$.

   On fait par récurrence $H_{<n>}$: $s_n \geqslant 2$

   Initiation $n = 1$

   Comme $u_1 = 3 > 2$, $H_{<1>}$ est vraie

   Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

   $\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } u_{n+1} \geqslant 2}$

   $$\begin{aligned} \text{On a : } s_{n+1} - 2 &= s_n^2 - s_n + 1 - 2 \\ &= s_n^2 - s_n - 1 \\ &= \square^2 - \square - 1 \end{aligned}$$

   On va étudier le signe du trinôme $\square^2 - \square - 1$

   Comme $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$,

   le trinôme admet 2 racines dans $\mathbb{R}$, $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.5$ et $r = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$

   Et on a la factorisation $\square^2 - \square - 1 = 1\ (\square - r)\left(\square - r'\right)$ et le bô tableau

$\square$	$-\infty$	r'	r	2	$-\infty$
sgn $\square^2 - \square - 1$	$+$	$-$	$+$	$+$	

   Conclusion : Comme $s_n \geqslant 2$ (d'après $H_{<n>}$), on a $s_{n+1} - 2 \geqslant 0$.

   Donc $H_{<n+1>}$ est vraie. Fini

   Autre solution pour l'hérédité : on a $u_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1 = h(u_n)$ avec $h : x \longmapsto x^2 - x + 1$

   On vérifie facilement que la fonction $h : x \longmapsto x^2 - x + 1$ est croissante sur $[2, +\infty[$

   Ainsi on a
   $$\left.\begin{array}{c} u_n \geqslant 2 \\ \textit{la fonction } h \textit{ est croissante sur } [2,+\infty[\end{array}\right\} \Longrightarrow h(u_n) \geqslant h(2)$$

   Conclusion : $u_{n+1} = h(u_n) \geqslant h(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3 \geqslant 2$. Donc $H_{<n+1>}$ est vraie.

2. Une somme

   (a) Pour tout n, simplifier $\dfrac{1}{s_n - 1} - \dfrac{1}{s_{n+1} - 1}$ Pour tout n, on a

   $$\begin{aligned} \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1} &= \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{(s_n^2 - s_n + 1) - 1} \\ &= \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_n\,(s_n - 1)} \\ &= \frac{s_n - 1}{s_n\,(s_n - 1)} \\ &= \frac{1}{s_n} \end{aligned}$$

(b) En déduire une simplification de $\sum_{k=0}^{N} 1/s_k$ On télescope, ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} 1/s_n &= \sum_{n=0}^{N}\left[\frac{1}{s_n-1}-\frac{1}{s_{n+1}-1}\right]\\ &= \frac{1}{s_0-1}-\frac{1}{s_{N+1}-1}\end{aligned}$$

(c) En déduire la valeur $\sum_{k=0}^{\infty} 1/s_k \overset{def}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} 1/s_k$

De plus $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$ oups j'avais oublié de le faire démontrer

On a en effet $s_n = 1 + \prod_{k=0}^{n-1} s_k \geqslant 1 + 2.2...2 = 1 + 2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Conclusion on a $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} 1/s_n = \frac{1}{s_0-1} = \frac{1}{2-1} = 1$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,..,x_n,y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$.
Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

1. Démontrer que le minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $h : t \longmapsto a^p\,\dfrac{t^{-1/q}}{p} + b^q\,\dfrac{t^{1/p}}{q}$ vaut ab.

   La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned}
\forall\, t>0,\ h'(t) = \frac{d}{dt}\left[a^p\,\frac{t^{\frac{-1}{q}}}{p} + b^q\,\frac{t^{\frac{1}{p}}}{q}\right] &= a^p\,\frac{-1}{q}\,\frac{t^{\frac{-1}{q}-1}}{p} + b^q\,\frac{1}{p}\,\frac{t^{\frac{1}{p}-1}}{q}\\
&= \frac{1}{pq}\left[-a^p\,\frac{1}{t^1 t^{\frac{1}{q}}} + b^q\,\frac{t^{\frac{1}{p}}}{t^1}\right]\\
&= \frac{1}{pq\,t}\left[\frac{-a^p + b^q\,t^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}{t^{\frac{1}{q}}}\right]\\
&= \frac{1}{pq\,t}\left[\frac{-a^p + b^q\,t}{t^{\frac{1}{q}}}\right]
\end{aligned}$$

   D'où le tableau

x	0		a^p/b^q		$+\infty$
$-a^p+b^q\,t$		$-$	0	$+$	
sgn h'		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

   Ainsi le minimum m de de la fonction h vaut

$$\begin{aligned}
m = h\left(\frac{a^p}{b^q}\right) &= a^p\,\frac{\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{-1}{q}}}{p} + b^q\,\frac{\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}}}{q}\\
&= \frac{a^p\,a^{\frac{-p}{q}}\,b^{\frac{q}{q}}}{p} + \frac{a^{\frac{p}{p}}\,b^q\,b^{\frac{-q}{p}}}{q}\\
&\text{Or } p+\frac{-p}{q} = p\left(1+\frac{-1}{q}\right) = p\frac{1}{p} = 1 \text{ et } q+\frac{-q}{p} = \cdots = 1\\
&= ab\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = ab
\end{aligned}$$

2. En déduire que pour tout $t>0$: $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,y_i\right| \leqslant \dfrac{t^{-1/q}}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p + \dfrac{t^{1/p}}{q}\displaystyle\sum_{i=1}^n |y_i|^q$

   Avec l'inégalité triangulaire, on a $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,y_i\right| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i|$

   Pour tout $t>0$ et tout $i \in \{1,2,...,n\}$,

   On utilise la fonction h avec $a = |x_i|$ et $b = |y_i|$

   Ainsi on a $|x_i|\,|y_i| = ab \leqslant h(t) = |x_i|^p\,\dfrac{t^{\frac{-1}{q}}}{p} + |y_i|^q\,\dfrac{t^{\frac{1}{p}}}{q}$

   Puis on somme de $i=1$ à $i=n$

$$\text{Ainsi tout } t>0 : \left|\sum_{i=1}^n x_i\,y_i\right| \leqslant \frac{t^{\frac{-1}{q}}}{p}\sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{t^{\frac{1}{p}}}{q}\sum_{i=1}^n |y_i|^q$$

3. En déduire l'inégalité de Hölder : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,y_i\right| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

L'inégalité précédent assure que $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right|$ est un minorant sur $\mathbb{R}_+^*$

pour fonction h avec $a = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $b = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Or le minimum de la fonction h est ab, ainsi on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\right| \leqslant ab = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$