

|                                               |          |          |
|-----------------------------------------------|----------|----------|
| <b>Les suites (petite introduction).</b>      | <b>2</b> | <b>2</b> |
| <b>1 Vocabulaire, Quantificateur</b>          | <b>1</b> | <b>4</b> |
| <b>2 À la mode géométrique.</b>               |          | <b>2</b> |
| <b>3 Les suites Arithmético-Géométriques.</b> |          | <b>3</b> |
| <b>4 Suites d'ordre 2.</b>                    |          | <b>4</b> |

## 1 Vocabulaire, Quantificateur

### Définition 1.

Une suite numérique (réelle ou complexe), notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , est une liste d'éléments de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  indexées sur  $\mathbb{N}$ , CàD

**Attention** Il ne faut pas confondre : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et le nombre  $u_n$ .

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \underbrace{u_0}_{n=0}, \underbrace{u_1}_{n=1}, u_2, \dots, \underbrace{u_{641}}_{n=641}, \dots, \underbrace{u_{2021}}_{n=1492}, \dots, \underbrace{u_{10^{24}}}_{n=10^{24}}, \dots \right)$$

### Exemples

- > La suite constante égale à  $a$ , CàD  $(a)_{n \in \mathbb{N}} = (a, a, \dots, a, \dots)$ , CàD  $\forall n, u_n = a$
- > la suite  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$  est une suite géométrique de raison  $a$ , on a  $\forall n, u_n = a^n$
- > la suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, \dots, \dots)$ , on a  $\forall n, u_n = (-1)^n$

### Définition 2. Vocabulaire générale

- > La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante  
Ssi  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$
- > La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée  
Ssi Il existe  $M$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- > La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée  
Ssi Il existe  $K$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$

### Définition 3. Suite récurrentes

- > On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente d'ordre 1 Ssi  
Ssi le nombre  $u_{n+1}$  s'exprime (entre autre) en fonction du précédent, CàD de  $u_n$ .  
*Faire des récurrence d'ordre 1 n'est jamais une mauvaise idée.*
- > On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente d'ordre 2 Ssi  
Ssi le nombre  $u_{n+2}$  s'exprime (entre autre) en fonction des 2 précédents, CàD de  $u_{n+1}$  et  $u_n$ .  
*Faire des récurrence d'ordre 2 avec double initialisation n'est jamais une mauvaise idée.*

## 2 À la mode géométrique.

### Définition 4. À la mode géométrique

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de type/modèle géométrique

Ssi on a une relation de la forme  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \underbrace{(Facteur)} u_n$

Remarque : il est possible que le facteur dépende de  $n$ , CàD  $Facteur = F_n$ .

### À la mode géométrique

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite type/modèle géométrique, alors on a le calcul suivant

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &\leq F_{n-1} \underbrace{u_{n-1}} \\ &\leq F_{n-1} (F_{n-2} \underbrace{u_{n-2}}) \\ &\leq F_{n-1} \cdot F_{n-2} \cdot (F_{n-3} u_{n-3}) \\ &\vdots \\ &\leq F_{n-1} F_{n-2} \dots (F_0 u_0) \end{aligned}$$

### Théorème 5. Cv, div, chaos pour des suites géométriques.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ .

À l'aide du calcul "à la mode géo", on a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$

Alors on a

- > Lorsque  $q = 1$   
alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $u_0$  et donc elle converge vers  $u_0$ .
- > Lorsque  $|q| < 1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.  
complément lorsque  $0 < q < 1$  la suite est monotone et lorsque  $-1 < q < 0$  la suite oscille.
- > Lorsque  $q > 1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $\pm\infty$  selon le signe de  $u_0$ .
- > Lorsque  $q \leq -1$  alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  chaotique CàD ne converge pas et ne diverge pas vers  $\pm\infty$ .

Démonstration :

– Lorsque  $q > 0$ , on utilise  $u_n = q^n u_0 = u_0 a^{bouge} = u_0 e^{n \ln(q)}$ . Il y a 3 situations :

*Situation 1 :  $\ln(q) > 0 \iff q > 1$*

*on a alors  $n \ln(q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$*

*Situation 2 :  $\ln(q) = 0 \iff q = 1$*

*la suite est constante égale à  $u_0$*

*Situation 3 :  $\ln(q) < 0 \iff q \in ]0, 1[$*

*on a alors  $n \ln(q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$*

– Lorsque  $q \in ]-1, 0[$ , on va mesurer la distance entre  $u_n$  et 0

$$|u_n - 0| = |u_n| = |q^n u_0| \leq |q|^n |u_0| = |u_0| \exp(n \ln |q|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ car } \ln |q| < 0$$

Donc la distance entre  $u_n$  et 0 tend vers 0

Ainsi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

### 3 Les suites Arithmético-Géométriques.

#### Définition 6. Les suites Arithmético-Géométriques

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite.

> On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmético-géométrique

Ssi Il existe deux constantes  $a, b$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Remarque : Une suite arithmético-géométrique est donc une suite récurrente d'ordre 1.

> La suite Homogène associée est la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = aH_n + \underline{0}$$

#### Théorème 7.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmético-géométrique vérifiant

$$\forall n, u_{n+1} = au_n + b$$

Alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la somme de

> D'une suite particulière  $(K_n)$  *constante* et vérifiant la même récurrence

> De la suite Homogène associée  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = K_n + H_n$$

#### Démonstration par récurrence

> Comme  $(K_n)$  est une suite particulière *constante* et vérifiant la même récurrence,

$$\text{on a : } \forall n \in \mathbb{N}, K_n = K \text{ et } K_{n+1} = aK_n + b,$$

$$\text{ainsi } K = aK + b \implies K = \frac{b}{1-a} \text{ (lorsque } a \neq 1). \text{ Conclusion : lorsque } a \neq 1, \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}, K_n = \frac{b}{1-a}$$

> Comme  $(H_n)$  est la suite homogène associée,

$$\text{on a : } \forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = aH_n,$$

$$\text{ainsi la suite } (H_n) \text{ est géométrique. Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, H_n = H_0 a^n$$

> On va démontrer par récurrence  $H_{<n>}$  :  $u_n = K_n + H_n = \frac{b}{1-a} + H_0 a^n$

Initialisation  $n = 0$

$$\text{On veut } u_0 = \frac{b}{1-a} + H_0 a^0 = \frac{b}{1-a} + H_0$$

$$\text{Je choisis } H_0 = u_0 - \frac{b}{1-a} \text{ et ça match!!!}$$

Hérédité On suppose  $H_{<n>}$

$$\text{On va montrer } H_{<n+1>}, \text{ CàD } u_{n+1} = \frac{b}{1-a} + H_0 a^{n+1}$$

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b = a \left( \frac{b}{1-a} + H_0 a^n \right) + b \\ &= H_0 a^{n+1} + a \frac{b}{1-a} + b \\ &= H_0 a^{n+1} + \frac{ab + b(1-a)}{1-a} \\ &= \frac{b}{1-a} + H_0 a^{n+1} \quad \text{Yes!} \end{aligned}$$

**Conclusion** : le théorème est démontré et on a en bonus que  $H_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}$

## 4 Suites d'ordre 2.

### Définition 8. Suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite.

> On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants Ssi il existe  $a, b, c$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \quad \text{avec } a \neq 0$$

> On appelle alors équation caractéristique associée à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\text{L'équation caractéristique} \quad aX^2 + bX + c = 0$$

### Théorème 9. Calcul du nombre $u_n$ en fonction de $n$ .

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$ .

Soit  $aX^2 + bX + c = 0$  son équation caractéristique et  $\Delta = b^2 - 4ac$ , son discriminant.

$$\text{Lorsque } \Delta = b^2 - 4ac > 0$$

Alors l'équation caractéristique a 2 sol/racines distinctes  $r$  et  $r'$  dans  $\mathbb{R}$

et on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda (r)^n + \mu (r')^n \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ des constantes.}$

$$\text{Lorsque } \Delta = b^2 - 4ac = 0$$

Alors l'équation caractéristique a 1 seule sol/racine  $r = r'$

et on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda (r)^n + \mu (n r^n) = (\lambda + \mu n) r^n \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ des constantes.}$

$$\text{Lorsque } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Alors l'équation caractéristique a 2 sol/racines distinctes  $r$  et  $r'$  dans  $\mathbb{C}$

De plus  $r = a + ib = \rho e^{i\theta}$  et  $r' = \bar{r} = a - ib = \rho e^{-i\theta}$

et on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda [\rho^n \cos(n\theta)] + \mu [\rho^n \sin(n\theta)] \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ des constantes.}$

Démonstration : Les 3 situations se font exactement pareilles.

Pour la démonstration, je suppose que  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ .

La démonstration se fait en 2 étapes.

> Étape 1 : On choisit finement  $\lambda$  et  $\mu$ .

On veut que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu (r')^n$  donc cela doit être vrai pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

Je choisis  $\lambda$  et  $\mu$  pour que

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda r^0 + \mu (r')^0 = u_0 \\ \lambda r^1 + \mu (r')^1 = u_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r + \mu r' = u_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ 0 + \mu(r' - r) = u_1 - r u_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 - \mu = u_0 - \frac{u_1 - r u_0}{r' - r} \\ \mu = \frac{u_1 - r u_0}{r' - r} \end{cases} \end{aligned}$$

> Étape 2 : On démontre maintenant par une récurrence à 2 étages

$$H_{<n>} : u_n = \lambda r^n + \mu (r')^n.$$

Initialisation :  $H_{<0>}$  et  $H_{<1>}$  sont vraies à cause de l'étape 1.

Hérédité

J'y vais rapide, je n'écris pas le "on suppose ...", ni le "on veut montrer ...."

On a

$$u_{n+2} = \frac{1}{a} [-b u_{n+1} - c u_n]$$

$$= \frac{1}{a} [-b(\lambda r^{n+1} + \mu (r')^{n+1}) - c(\lambda r^n + \mu (r')^n)]$$

$$= \lambda r^n \left( \frac{-br - c}{a} \right) + \mu (r')^n \left( \frac{-br' - c}{a} \right)$$

Comme r et r' sont des solutions de l'équation caractéristique

$$\text{On a } ar^2 + br + c = 0 \implies r^2 = \frac{-br - c}{a}$$

$$= \lambda r^n (r^2) + \mu (r')^n (r')^2$$

$$= \lambda r^{n+2} + \mu (r')^{n+2} \quad \text{fini.}$$