

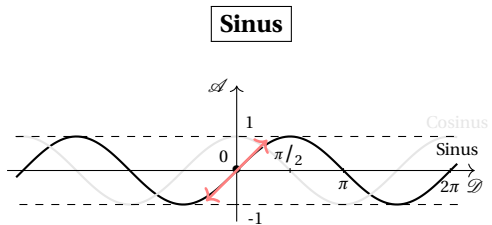
Trigo et Arc-Trigo.

1 Les fonctions Sinus et Cosinus.	1	2.1 La fonction Tangente.	5
1.1 Généralités.	1	2.2 Exercices	6
1.2 Les équations.	2	3 Arc-Trigo	7
1.3 Trigonométrie et Chebychev	3	3.1 Arc-tangente	7
1.4 Exercices.	3	3.2 Arc-sinus.	8
		3.3 Arc-cosinus.	9
		3.4 Arc-Exos.	10
2 La fonction Tangente.	5	4 Annexe : Congruence.	11

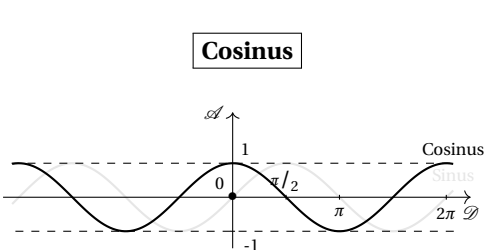
1 Les fonctions Sinus et Cosinus.

1.1 Généralités.

Théorème 1. Les fonctions Sinus et Cosinus



La fonction *Sinus* est dérivable, impaire, 2π -périodique et $\sin(0) = 0$.



La fonction *Cosinus* est dérivable, paire, 2π -périodique et $\cos(0) = 1$.

Les fonctions Sinus et Cosinus sont définies de $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{A} = \mathbb{R}$
Plus précisément, on a $\text{Im}(\text{Sinus}) = [-1, 1]$

Formulaire classique.

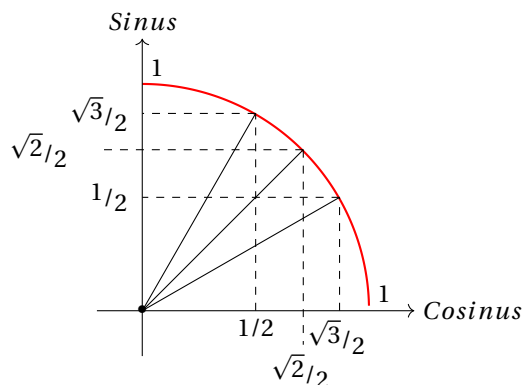
- > On a $\cos' = -\sin$ et $\sin' = +\cos$.
- > $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- > Les formules d'Euler :
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad \text{et} \quad e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$
- > Les formules de Moivre :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Kulture. Soit $n \in \mathbb{N}$

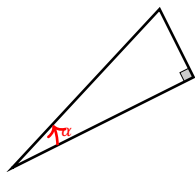
- > Chebychev : $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\square = \cos\theta$.
- > Dérivée n-ième :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Les valeurs particulières des fonctions Cosinus et Sinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

**Définition 2. Pour la Physique, la SI, la Kulture et la Gloire.**

Les fonctions Cosinus et Sinus sont définies géométriquement.



On sait que

$$\cos(\alpha) = \frac{adj}{hyp} \quad \sin(\alpha) = \frac{opp}{hyp}$$

Il y a aussi : $\tan(\alpha) = \frac{opp}{adj}$

1.2 Les équations.**Définition 3. Congruence : Définition, notation, manipulation.**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que a et b sont congrus modulo 2π , noté $a \equiv b \pmod{2\pi}$ Ssi

$$a \equiv b \pmod{2\pi} \iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = b + k2\pi$$

Calculs classiques.

$$3x + 5 \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \iff 3x \equiv \left(\frac{\pi}{2} - 5\right) \pmod{2\pi}$$

$$\iff x \equiv \frac{\pi/2 - 5}{3} \pmod{2\pi/3}$$

$$\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \left(\frac{\pi/2 - 5}{3}\right) + k \frac{2\pi}{3}$$

Théorème 4. Équations Trigonométrique.

Attention : les fonctions *Sinus* et *Cosinus* ne sont pas bijectives

Donc $\cos(X) = \cos(a) \not\Rightarrow X = a$

$$> \cos(X) = 1 \iff X \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

$$> \cos(X) = 0 \iff X \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$$

$$> \cos(X) = -1 \iff X \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

$$> \sin(X) = 1 \iff X \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$$

$$> \sin(X) = 0 \iff X \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$> \sin(X) = -1 \iff X \equiv -\pi/2 \pmod{2\pi}$$

Plus généralement

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{l} x \equiv \pi/3 \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x \equiv -\pi/3 \pmod{2\pi} \end{array} \right] \quad \cos(x) = \cos(a) \iff \left[\begin{array}{l} x \equiv a \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x \equiv -a \pmod{2\pi} \end{array} \right]$$

1.3 Trigonométrie et Chebychev

Théorème 5. Trigonométrie classique.

Basique : $\cos(a+b) = C_a C_b - S_a S_b$ et $\sin(a+b) = S_a C_b + C_a S_b$

> Duplication.

> Trop de Produit $\rightsquigarrow$ Plus de produit.

> Le grand remplacement : $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{ou/et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Théorème 6. Chebychev.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Il existe un *unique* polynôme T_n tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = P(\square)$ avec $\square = \cos \theta$

De plus les polynômes T_n vérifie la relation de récurrence d'ordre 2 :

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1} - T_n(X)$$

1.4 Exercices.

Exercice 1. Placer les angles sur le cercle trigonométrique et calculer : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right), \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Exercice 2.

1. Vérifier que : la fonction $h : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ est π -périodique.
2. Déterminer les périodes de la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{5}{3}x\right)$.

Exercice 3. Relier les angles a des angles "connus" puis calculer : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 4. Soit $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha) = -4/5$

1. Calculez $\sin(\alpha), \tan(\alpha)$.
2. Calculez $2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 3\sin(7\pi - \alpha) - \cos\left(7\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
3. Avez vous un argument qui justifie l'existence de α ? A-t-on unicité de α ?

Exercice 5. On va démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

1. Démontrer le par récurrence.
2. Démontrer le, en dérivant n fois, l'égalité : $\cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$

Exercice 6.

1. On note $a_n = \cos(2^n)$. Calculer a_{n+1} en fonction de a_n
2. On note $b_n = \cos\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Calculer b_{n+1} en fonction de b_n

Exercice 7.

> Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx$ et $\frac{d^n}{dx^n} [\sin^2(x)]$.

> De même mais avec $\cos^3(x)$.

Exercice 8.

1. Montrer que : $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ et $\sin(3x) = \sin(x)(4\cos^2(x) - 1)$.
2. Plus généralement montrer Chebychev, CàD $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\square = \cos\theta$.

Exercice 9. [Correction] On considère $S_n = \sum_{k=1}^n \cos(k)$

1. Calculer S_n en utilisant une somme géo.
2. Calculer $\sin\left(\frac{1}{2}\right) S_n$ puis en déduire S_n .

Exercice 10. [Correction] Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère $P_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$.

1. Montrer, *par récurrence*, que : $\forall n \geq 2, P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$.
2. On sait que : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Montrer, *directement*, que : $\forall n \geq 2, P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$.
3. On admet que $\frac{\sin\gamma}{\gamma} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} 1$.
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

2 La fonction Tangente.

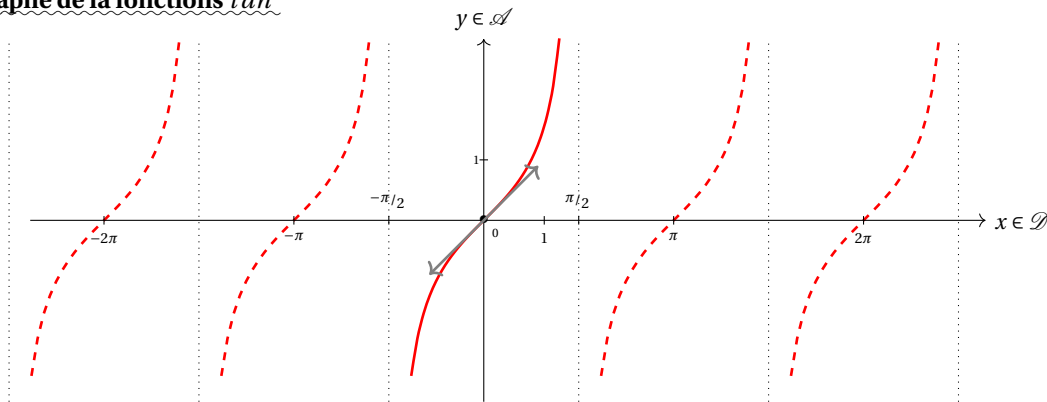
2.1 La fonction Tangente.

Théorème 7. Définition et propriétés de tan ?

La fonction tangente, notées tan, est définie de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \tan(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Graphe de la fonctions $\tan$



De plus

$$> \mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots \right\} = \dots \cup \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right[\cup \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[}_{\text{Intervalle principal}} \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\cup \dots$$

> La fonction tan est π -périodique, impaire sur $\mathcal{D}$, $\tan(0) = 0$

La fonction tan est strictement croissante sur son intervalle principale de définition

> La fonction $\tan$ est dérivable et même C^∞ sur $\mathcal{D}$

$$\text{et } \forall x \in \mathcal{D}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

> On lit sur le graphe $Im(\tan) =]-\infty, \infty[$.

> La fonction tan réalise une bijection strict croissante de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ sur $\mathbb{R}$

> L'équation $\tan(X) = b$ admet une unique solution, notée $\arctan(b)$, dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Les valeurs particulières de la fonction Tangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

Théorème 8. Équation-Trigo avec tangente.

> Équations avec tan. Soit $b \in \mathbb{R}$

On a le résultat simple et général.

$$\tan(X) = b \iff X \equiv \underbrace{\arctan(b)}_{\text{Sol } \in \text{ principale}} \pmod{[\pi]}$$

Applications :

$$> \tan(X) = 0 \iff x \equiv 0 \pmod{[\pi]}$$

$$> \tan(X) = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{[\pi]}$$

$$> \tan(X) = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{[\pi]}$$

> Trigonométrie avec tan.

$$\bullet \tan(a+b) = \dots = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

• Pour les intégrales trigo, le changement de variable en $u = \tan(t/2)$

> kulture : On sait que : $C^2 + S^2 = 1$ et $T = S/C$. On en déduit

$$C^2 + S^2 = 1 \implies C = \pm \sqrt{1 - S^2}$$

$$C^2 + S^2 = C^2 + T^2 C^2 = C^2 (1 + T^2) = 1 \implies C = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + T^2}}$$

$$C^2 + S^2 = \left(\frac{S}{T}\right)^2 + S^2 = S^2 \left(\frac{1 + T^2}{T^2}\right) = 1 \implies S = \pm \frac{T}{\sqrt{1 + T^2}}$$

2.2 Exercices

Exercice 11. [Correction] On se propose de résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$(E) \quad \tan X = \sqrt{2} + 1$$

Soit x fixé vérifiant $\tan x = \sqrt{2} + 1$

1. Intermédiaire.

(a) Montrer : $\tan(2x) = -1$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E') $\tan(2X) = -1$.

2. Comme à la question 1) on a une implication, CàD

$$\left[\tan x = \sqrt{2} + 1 \implies \tan(2x) = -1 \right],$$

ainsi les solutions de (E) se trouvent parmi celles de (E') mais il faut trier.

(a) Montrer qu'il existe $\theta \in]0, \pi/2[$

$$\text{tel que } \tan x = \sqrt{2} + 1 \iff x \equiv \theta \pmod{[\pi]}$$

(b) Déterminer θ .

Exercice 12. À l'aide du changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer les intégrales suivantes

$$\int^x \frac{1}{\sin(t)} dt \quad \text{et} \quad \int^x \frac{1}{\cos(t)} dt$$

3 Arc-Trigo

3.1 Arc-tangente

Définition 9. Le nombre $\arctan(a)$

Soit $b \in \mathbb{R}$.

$$\arctan(b) = \left| \begin{array}{l} \text{l'unique solution dans }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \text{de l'équation } \tan(X) = b \end{array} \right.$$

Donc le nombre $\arctan(a)$ a les propriétés suivantes

- > le nombre $\arctan(b)$ appartient à $]-\pi/2, \pi/2[$
- > le nombre $\arctan(b)$ est UNE solution de l'équation $\tan(X) = b$
donc $\forall b \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(b)) = b$

Théorème 10. La fonction Arc-Tangente

La fonction *Arc-tangente* est définie par

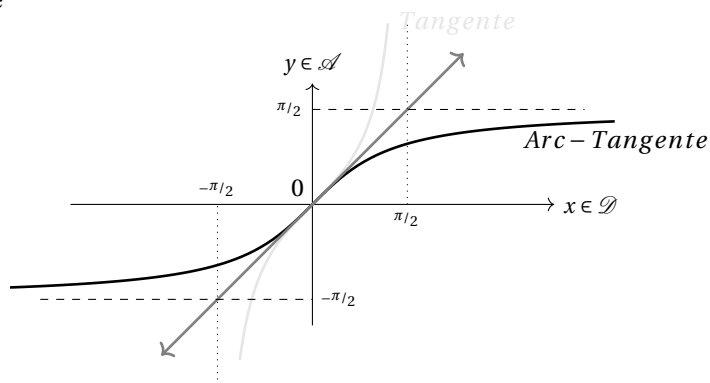
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \arctan : x \mapsto \arctan(x)$$

Propriétés.

- > Comme $\tan$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$

La fonction $\arctan$ réalise une bijection de $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

On a le graphe



La fonction $\arctan$ est strictement croissante, impaire sur $\mathbb{R}$, ainsi $\arctan(0) = 0$.

- > La fonction $\arctan$ est définie, continue, dérivable et même C^∞ sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

3.2 Arc-sinus.

Définition 11. Le nombre $\arcsin(a)$

Soit $a \in [-1, 1]$.

$$\arcsin(a) = \left| \begin{array}{l} \text{l'unique solution dans } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \text{de l'équation } \sin(X) = a \end{array} \right|$$

Donc le nombre $\arcsin(a)$ a les propriétés suivantes

> $\arcsin(a)$ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

> $\arcsin(a)$ est solution de l'équation $\sin(X) = a$ donc on a

$$\forall a \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(a)) = a$$

Théorème 12. La fonction *ArcSinus*

La fonction *ArcSinus* notée $\arcsin$ est définie sur $\mathcal{D}$ par

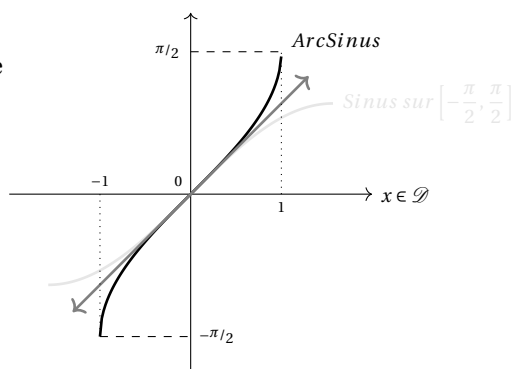
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \arcsin : x \mapsto \arcsin(x)$$

Propriétés.

> Comme Sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$

La fonction $\arcsin$ réalise une bijection de $\mathcal{D} = [-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

On a le graphe



La fonction $\arcsin$ est strictement croissante, impaire sur $\mathcal{D} = [-1, 1]$
ainsi $\arcsin(0) = 0$.

> La fonction $\arcsin$ est définie, continue sur $\mathcal{D} = [-1, 1]$,
dérivable et même C^∞ sur $\mathcal{D}' =]-1, 1[$

$$\text{et } \forall x \in \mathcal{D}' =]-1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3.3 Arc-cosinus.

Définition 13. Le nombre $\arccos(a)$

Soit $a \in [-1, 1]$.

$$\arccos(a) = \left| \begin{array}{l} \text{l'unique solution dans } [0, \pi] \\ \text{de l'équation } \cos(x) = a \end{array} \right.$$

La nombre ArcCosinus de a , noté $\arccos(a)$ est l'unique solution dans $[0, \pi]$ de l'équation

$$\cos(x) = a$$

Donc le nombre $\arccos(a)$ a les deux propriétés suivantes

- > $a \in \text{Im}(\cos) = [-1, 1]$ afin que l'équation $\cos(x) = a$ ait des solutions
- > $\arccos(a)$ appartient à $[0, \pi]$
- > $\arccos(a)$ est solution de l'équation $\cos(x) = a$ donc on a

$$\forall a \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(a)) = a$$

Théorème 14. La fonction ArcCosinus

La fonction ArcCosinus notée $\arccos$ est définie sur $\mathcal{D}$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \arccos : x \mapsto \arccos(x)$$

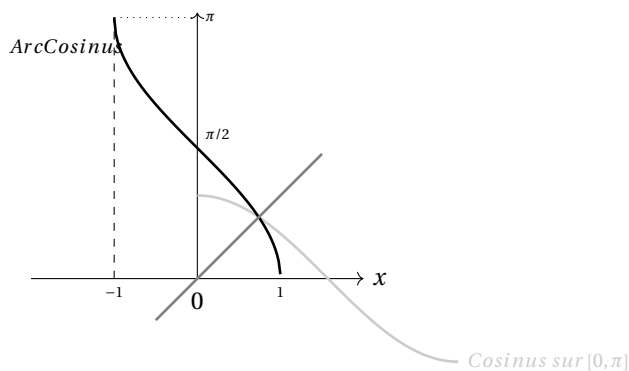
La fonction ArcCosinus a les propriétés suivantes

- > La fonction ArcCosinus est définie, continue sur $\mathcal{D} = [-1, 1]$ et dérivable et même C^∞ sur $\mathcal{D}' =]-1, 1[$ et

$$\forall x \in \mathcal{D}' =]-1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- > La fonction $\arccos$ est strictement décroissante sur $\mathcal{D} = [-1, 1]$.

- > On a le graphe



3.4 Arc-Exos.

Exercice 13. Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
2. Démontrer que : $\forall x \in [0, 1], \arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1)$
3. Montrer que : $\forall 0 \leq x, \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x)$

Exercice 14. [Correction] On va montrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

1. Méthode 1. A l'aide d'une étude de fonction, montrer l'égalité.
2. Méthode 2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Je note : $A = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$ et $B = \arctan(p+1) - \arctan(p)$.

Montrer que A et B sont des solutions de l'équation $\tan(X) = \frac{1}{1+p+p^2}$

Encadrer A et B . Conclure.

3. Application : Simplifier puis calculer la limite quand $n \rightarrow \infty$ de : $S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$

Exercice 15. [Correction] Le but de l'exercice est de calculer $A = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3)$

1. Montrer que A est une solution de l'équation $\tan(X) = 0$
2. Résoudre l'équation.
3. Encadrer A , puis en déduire la valeurs de A .

Exercice 16. [Correction] On va démontrer la formule de Machin

$$\text{CàD} \quad 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Kulture : John Machin (1680-1751), mathématicien anglais, a réussi à calculer, à la main, 100 décimales de π en 1706 grâce à cette relation.

Je note $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

1. Un peu de calcul.
 - (a) Calculer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$
 - (b) Calculer $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$.
En déduire la valeur de $\tan(2\alpha)$ puis $\tan(4\alpha)$.
 - (c) Calculer $\tan(x+y)$ en fonction de $\tan x$ et de $\tan y$.

En déduire la valeur de $\tan(4\alpha - \beta)$

2. Conclusion.

Démontrer que $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. En déduire

$$\left. \begin{array}{l} \dots \leq 4\alpha - \beta \leq \dots \\ ET \\ \tan(4\alpha - \beta) = \dots \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = 4\alpha - \beta = \dots$$

4 Annexe : Congruence.

Définition 15.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

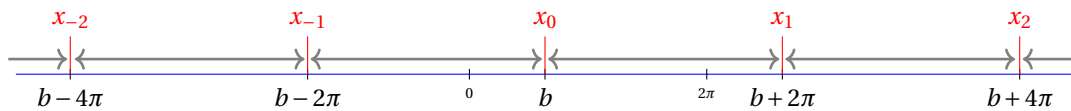
On dit que a est congru à b modulo 2π , noté $a \equiv b \pmod{2\pi}$ Ssi

$$a \equiv b \pmod{2\pi} \iff \text{Il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a = b + k(2\pi)$$

Interprétation géométrique.

$$x \equiv b \pmod{2\pi} \text{ Ssi Il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = x_k = b + k(2\pi).$$

Les nombres $x_0, x_1, x_2, \dots$ sont distants de 2π , CàD



Théorème 16. Propriétés de bon sens.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$

> Symétrie

$$a \equiv b \pmod{2\pi} \iff b \equiv a \pmod{2\pi}$$

> Transitivité.

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{2\pi} \\ b \equiv c \pmod{2\pi} \end{array} \right\} \implies a \equiv c \pmod{2\pi}$$

Démonstration : Je vais démontrer la transitivité.

On suppose que $a \equiv b \pmod{2\pi}$ et $b \equiv c \pmod{2\pi}$

Ainsi Il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tq $a = b + k(2\pi)$ et $b = c + k'(2\pi)$

On veut montrer que $a \equiv c \pmod{2\pi}$

CàD on veut trouver $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a = c + p(2\pi)$

On a (c'est l'entretien d'embauche)

$$a = b + k(2\pi) = [c + k'(2\pi)] + k(2\pi) = c + (k + k')(2\pi)$$

Je choisis $p = k + k'$.

Avec ce choix p est un entier donc p convient.

Fini $\square$

Théorème 17. Formulaire.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$

> Addition

$$a + b \equiv c \pmod{2\pi} \iff a \equiv (b - c) \pmod{2\pi}$$

> Produit. On suppose que $b \neq 0$

$$ab \equiv c \pmod{2\pi} \iff a \equiv c/b \pmod{2\pi/b}$$

$$a/b \equiv c \pmod{2\pi} \iff a \equiv cb \pmod{b2\pi}$$

Application : Résoudre l'équation $(2x + 3) \equiv (5x + 7) \pmod{2\pi}$

$$(2x + 3) \equiv (5x + 7) \pmod{2\pi} \iff (2x - 5x) \equiv (7 - 3) \pmod{2\pi}$$

$$\iff x \equiv \frac{4}{-3} \pmod{2\pi/-3}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation sont $x = x_k = -\frac{4}{3} - k\frac{2\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Correction.

Solution de l'exercice 9 (Énoncé) On va faire les dominos

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right) S_n = \sin\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=1}^n \cos(k) = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cos(k)$$

$$\begin{aligned} \text{On modifie le plateau : } \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cos(k) &= SC = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{1}{2} + k\right) + \sin\left(\frac{1}{2} - k\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin\left(k + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \right) \quad \text{car Sinus est impaire} \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{2}\right) S_n &= \frac{1}{2} \left(\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(1 - \frac{1}{2}\right) \right) + \frac{1}{2} \left(\sin\left(2 + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(2 - \frac{1}{2}\right) \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2} \left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{3}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right) + \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{5}{2}\right) - \sin\left(\frac{3}{2}\right) \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}\right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) - \sin\frac{1}{2} \right] \\ \textbf{Conclusion :} \text{ Si } \sin\left(\frac{1}{2}\right) &\neq 0, \text{ on a } S_n = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. On a facilement

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha.$$

C'est les dominos multiplicatifs

$$P_n = \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \prod_{k=0}^n \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)} \right)$$

$$= \text{..Dominos..} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

2. On a
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{\infty \sin(0)}$
- , c'est une FI avec
- $\sin(0)$
- donc va utiliser l'approximation linéaire.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1} [\square + o(\square)]}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + o\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

- 1.

- (a) Soit
- $x \in \mathbb{R}$
- . tel que
- $\tan x = \sqrt{2} + 1$

 $\tan 2x =$ On fait apparaître $\tan$ à l'aide des formules trigo

$$= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{1 - (\sqrt{2} + 1)^2} = \dots = -1$$

- (b) Comme
- $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$
- , on a

$$\begin{cases} \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 2x \equiv -\frac{\pi}{4} [\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{12} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

2. Recherche des solutions de (E).

Comme $\tan x = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow \tan(2x) = -1$, les solutions de (E) sont **parmi** les solution ci-dessus.

Il faut, on va d'abord résoudre théoriquement (pour savoir ce que l'on cherche) puis identifier.

- (a)
- Résolution théorique.**

On sait que la fonction Tangente est strictement croissante, continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc Tangente est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ Ainsi il existe un unique $\theta_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan \theta_0 = \sqrt{2} + 1$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{2} + 1 = \tan \theta_0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv \theta_0 [\pi]$$

De plus $\sqrt{2} + 1 > 0 \Rightarrow \theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

- (b)
- Identification**

Comme $x \equiv -\frac{\pi}{12} \left[\frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow \left(x \equiv -\frac{\pi}{12} [\pi] \text{ ou } x \equiv \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) [\pi] \right)$, on a grâce au signe $\theta_0 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Conclusion : } (E) \begin{cases} \tan x = \sqrt{2} + 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv \left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) [\pi]$$

Solution de l'exercice 14 (Énoncé)

1. On va montrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

(a) Méthode 1. On étudie la fonction h définie par l'expression

$$h : x \mapsto f(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

La fonction est dérivable sur $\mathcal{D}' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) \right] \\ &= [1+x]' \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+(x)^2} - \left[\frac{1}{1+x+x^2} \right]' \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} - (1+2x) \frac{-1}{(1+x+x^2)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2+2x+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2} \\ &= \frac{-1-2x}{(2+2x+x^2)(1+x^2)} + \frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2} \\ &\quad \text{Or on remarque que : } (2+2x+x^2)(1+x^2) = \dots \\ &\quad \text{et } 1+(1+x+x^2)^2 = \dots \\ &\quad \text{Donc c'est égal !!!!!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où le tableau

x	$-\infty$	∞
$g'(x)$	0	
$g(x)$	$\longrightarrow$	

La fonction est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = \dots = 0$ donc la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}$.(b) Méthode 2. Je note : $A = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$ et $B = \arctan(p+1) - \arctan(p)$.Rappel : On sait $\arctan(a)$ est une solution de l'équation $\tan(x) = a$ Ainsi ainsi : $\forall a \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(a)) = a$.

$$> \text{ On a } \tan(A) = \frac{1}{1+p+p^2}.$$

$$> \text{ De même, on a } \tan(B) = \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{1/(p+1) - 1/p}{1 - \frac{1}{(p+1)p}} = \frac{1}{1+p+p^2}$$

$$\text{Donc } A \text{ et } B \text{ sont solutions de l'équation } \tan(X) = \frac{1}{1+p+p^2}$$

> De plus la fonction Arc-tangente est croissante et impaire, on a donc $0 \leq \arctan(p) \leq \arctan(p+1) < \frac{\pi}{2}$

$$\text{Ainsi } 0 < A < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 < B < \frac{\pi}{2}$$

> Enfin on sait que les solution de l'équation $\tan(X) = m$ sont de la forme $X \equiv X_0 \pmod{[\pi]}$.

$$\text{Donc sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ l'équation } \tan(X) = \frac{1}{1+p+p^2} \text{ admet une unique solution.}$$

Conclusion : $A = B$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

> On trouve $\tan(A) = \dots = 0$.

Donc A est une solution de l'équation $\tan(X) = 0$

> On sait que $\tan(X) = 0 \iff x \equiv 0 \pmod{\pi}$

> De plus, comme Arc-tangente est croissante, on a $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) \leq \arctan(2) \leq \arctan(3) < \frac{\pi}{2}$

$$\text{Ainsi: } \frac{3\pi}{4} \leq A = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) \leq \frac{3\pi}{2}$$

La seule solution de l'équation $\tan(X) = 0$ dans $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$ c'est π

donc forcément $A = \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$