Programme de colle de la semaine 4

du Lundi 06 Octobre au Vendredi 10 Octobre.

Questions de cours.

> Formule du binôme.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer la formule du binôme, CàD $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

> Mon métier : Banquier.

Vous empruntez un capital $C_0 = 100\,000$ *euros* à un taux **mensuel** de i sur $N = 144$ de mois.
On note C_n, le capital restant à rembourser au mois n. On admet que : le capital suit la relation

$$C_{n+1} = C_n + iC_n - M$$

où M désigne votre mensualité (fixe).

1. Calculer C_n en fonction de n.
2. Déterminer M afin que $C_{144} = 0$, CàD vous avez fini de rembourser, vous ne devez plus rien à la banque
3. Bonus : Demander à votre colleur d'expliquer la relation : $C_{n+1} = C_n + iC_n - M$
   et le lien entre taux **mensuel** et taux **annuel**.

> Suite classique d'ordre 2.

Soit (F_n) la suite définie par : $F = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Calculer F_n en fonction de n.

Question Bonus : En manipulant le binôme et les sommes, donner une expression de F_n.

> Intégration par partie Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t)\, dt$.

Calculer W_{n+1} en fonction de W_n.

> Changement de variable

Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{t(t+1)}$, puis avec le changement de variable $x^p = t$, calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^p)} dx$

> Une primitive

Décomposer en éléments simples $\dfrac{2t+1}{2t^2+3t+1}$, calculer $\displaystyle\int^x \frac{2t+1}{2t^2+3t+1} dt$

> Une primitive

Avec plein d'IPP, calculer $\displaystyle\int^x \cos(2t)\, e^{-t}\, dt$

Question Bonus

On sait : $\cos(2t)\, e^{-t} = \mathrm{Re}\left(e^{i(2t)} e^{-t}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{-t+i(2t)}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{(-1+2i)t}\right)$

On sait que : $e^{rt} \overset{Prim}{\rightsquigarrow} \dfrac{e^{rt}}{r}$ et (admis) cette formule est valide avec les complexes

Ainsi on a $\cos(2t)\, e^{-t} = \mathrm{Re}\left(e^{(-1+2i)t}\right) \overset{Prim}{\rightsquigarrow} \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{(-1+2i)t}}{-1+2i}\right)$

La question est maintenant : Calculer $\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{(-1+2i)t}}{-1+2i}\right)$ et retrouver normalement de la question principale

Exercices.

Des manipulations d'intégrale : Voir DM 4.