TD 3 Calcul de somme et Produit.

Mercredi 24 Septembre 2025.

Exercice 1. [Correction] Calculer une primitive pour les fonctions suivantes

$2x^4 - 5x^3 - \dfrac{1}{2x} + e^{-x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

$(2t+1)^3$ *sur* $\mathbb{R}$

$\sqrt{2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ *Sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^3}$ *Sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\left(t^4 + t + 1\right) \sqrt[3]{t}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\sin(3x) - e^{-2x} + \dfrac{1}{1+x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\cos(x/2) - e^{3x} + \dfrac{1}{1-x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

$\dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Exercice 2. [Correction] Calculer une primitive pour les fonctions suivantes

$\tan(t) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *sur* $\left]-\pi/2\,,\pi/2\right[$

te^{-3t^2} sur $\mathbb{R}$

$\dfrac{t^2}{1+t^3} + \dfrac{t}{1+t^2}$

$\dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 3. [Correction]

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2,\ u_1 = 6 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n$$

1. Démontrer que le nombre u_n est un entier pair.
2. Calculer le nombre u_n en fonction de n.
3. En utilisant G-p , montrer que : $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$.

   On a donc $\left(3 - \sqrt{5}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
4. Déduire de ce qui précède que : la suite $\left(\sin\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right]\right)$ converge vers 0.

   Indication Méthodologie : C'est un cheminement "naturel", Il faut faire le lien entre $\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi$ *et ce qui précède*

   > *Avec Q2, on a* $\left(3+\sqrt{5}\right)^n = \cdots$. *On remplace.*

   > *Avec Q1 , on peut gérer sachant que la fonction Sinus est* 2π*-périodique.*

   > *Enfin avec Q3, on finit*

Exercice 4. [Correction] Soit $x > 1$. On va majorer l'expression : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\, dt$

1. Étudier, sur $\mathbb{R}_+^*$, les variation de la fonction $h\ :\ t \longmapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$
2. En déduire que : $\forall\, t \in [1, x],\quad \dfrac{e^{t^2}}{t^4} \leqslant \dfrac{e^{x^2}}{x^2}.\dfrac{1}{t^2}$
3. En déduire une majoration de $F(x)$ sur $[1, +\infty[$.

Exercice 5. [Correction]

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

   Déterminer $\mathscr{D}_f$ et étudier les variations de f.
2. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 3,\ \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$

Exercice 6. Mon possible métier : Banquier

Vous empruntez un capital $C_0 = 100\,000\ euros$ à un taux **mensuel** de i sur $N = 144$ de mois.
On note C_n, le capital restant à rembourser au mois n. On admet que : le capital suit la relation

$$C_{n+1} = C_n + iC_n - M$$

où M désigne votre mensualité (fixe).

1. Calculer C_n en fonction de n.
2. Déterminer M afin que $C_{144} = 0$, CàD vous avez fini de rembourser, vous ne devez plus rien à la banque

   Application : vous pouvez maintenant expliquer à vos parents et leur banquier comment est calculé la mensualité M *d'un prêt à taux fixe.*
3. Bonus : Dans la pratique, le banquier vous donne le taux I le TEG, i.e le Taux Effectif Global **annuel**.
   (a) Montrer que $\quad 1 + I = (1+i)^{12}$
   (b) Montrer que $\forall\, x > 0,\quad (1+x)^{1/12} > 1 + \dfrac{x}{12}$

   En déduire que $i < \dfrac{I}{12}$.

   (c) Que peut-on déduire de ce calcul ?

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

$2x^4 - 5x^3 - \frac{1}{2x} + e^{-x}\ sur\ \mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{2\,\frac{x^5}{5} - 5\,\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\,\ln|x| + (-1)e^{-x}}$$

$(2t+1)^3$

$$\boxed{\frac{1}{8}(2t+3)^4}$$

$\sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}\ Sur\ \mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\sqrt{2}\ Monôme\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\ Monôme}$$

$\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}\ Sur\ \mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{Monôme\ +\ Monôme}$$

$\left(t^4 + t + 1\right)\sqrt[3]{t} = t^{4+1/3} + t^{1/3} + t^{1/3}$

$$\boxed{Monôme\ +\ Monôme\ +\ Monôme}$$

$\sin(3x) - e^{-2x} + \frac{1}{1+x}\ sur\ \mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\frac{-1}{3}\cos(3x) - \frac{1}{(-2)}e^{-2x} + \ln|1+x|}$$

$\cos(x/2) - e^{3x} + \frac{1}{1-x} = \cos(x/2) - e^{3x} \ominus \frac{1}{x-1}$

$$\boxed{2\sin(x/2) - \frac{1}{3}e^{3x} - \ln|x-1|}$$

$\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{(x+1)^2} =$
$\ominus\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(x+1)^2}$

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln|2x-1| + \ \frac{-1}{x-1}}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

$\tan(t) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{\square'}{\square}$

$$\boxed{-\ln|\cos(x)|}$$

$te^{-3t^2} = \square' e^{\square}$

$$\boxed{\frac{1}{(-3)} e^{-3t^2}}$$

$\dfrac{t^2}{1+t^3} + \dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{\square'}{\square} + \dfrac{\square'}{\square}$

$$\boxed{\frac{1}{3}\ln|1+t^3| + \frac{1}{2}\ln|1+t^2|}$$

$\dfrac{1}{t\ln(t)} = \dfrac{1/t}{\ln(t)} = \dfrac{\square'}{\square}$

$$\boxed{\ln|\ln(x)|}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Démontrer que le nombre u_n est un entier pair.

   On fait avec une récurrence à deux étages,...

2. Calculer le nombre u_n en fonction de n.

   C'est une suite récurrente d'ordre 2 classique

   Finalement on trouve que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$

3. En utilisant G-p , montrer que : $0 < 3-\sqrt{5} < 1$. On a

   On a : $3-\sqrt{5} = \dfrac{(3)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{9-5}{3+\sqrt{5}} > 0$

   ET

   $1-\left(3-\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}-2 = \dfrac{5-4}{\sqrt{5}+2} > 0$

   Conclusion : On a bien : $0 < 3-\sqrt{5} < 1$.

4. Déduire de ce qui précède que : la suite $\left(\sin\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right]\right)$ converge vers 0.

   On a le cheminement naturel

$$\sin\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n \pi\right] = \sin\left[\left(u_n - \left(3-\sqrt{5}\right)^n\right)\pi\right]$$

$$= \sin\left[u_n\pi - \left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right]$$

Or u_n est un nombre pair

donc on peut écrire $u_n = 2k$

$$= \sin\left[2k\pi - \left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right]$$

Or la fonction Sinus est $2\pi -$ périodique

Donc

$$= \sin\left[-\left(3-\sqrt{5}\right)^n \pi\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{car } \left(3-\sqrt{5}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Étude classique.

   > La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

   > $\forall\, t \in \mathscr{D},\ h'(t) = \dfrac{2te^{t^2}.t^2 - e^{t^2}.(2t)}{(t^2)^2} = \dfrac{2te^{t^2}\left[t^2-1\right]}{t^4} = \dfrac{2te^{t^2}(t-1)(t+1)}{t^4}$

   > D'où le bô tableau

x	0		1		$+\infty$
$t-1$		$-$	0	$+$	
sgn h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	e	$\nearrow$	

2. Pour tout/chaque $t \in [1,x]$,

$$\frac{e^{t^2}}{t^4} = \frac{e^{t^2}}{t^2}\frac{1}{t^2} = h(t)\frac{1}{t^2} \leqslant h(x)\frac{1}{t^2} \qquad \text{car la fonction } h \text{ est croissante sur } [1,x]$$

3. On intègre l'inégalité sur $[1,x]$

   Ainsi $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant \int_1^x h(x)\frac{1}{t^2}\,dt$

$$\leqslant h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= h(x)\left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = \frac{e^{x^2}}{x^2}\left[-\frac{1}{x}+1\right]\frac{e^{x^2}}{x^2}\frac{x-1}{x}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Étude classique.

   $>$ La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$

   $>$ $\forall t \in \mathscr{D},\ f'(t) = \dfrac{\frac{1}{x}.x - \ln(x).1}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

   $>$ On a $1 - \ln(x) \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \ln(x)$

   $\iff e^1 \geqslant x$

   D'où le bô tableau

x	0		$e \approx 2.7$		$+\infty$
$1-\ln(x)$		$+$	0	1	
sgn f'		$+$	0	1	
f		$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	

2. Pour $n \geqslant 3$ et Pour tout $t \in [n, n+1]$,

   $\dfrac{\ln(t)}{t} = f(t) \leqslant f(n) = \dfrac{\ln(n)}{n}$ car la fonction f est dé-croissante sur $[n, n+1]$

   On intègre l'inégalité sur $[n, n+1]$

   Ainsi $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt \leqslant \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{\ln(n)}{n}\,dt}_{=\frac{\ln(n)}{n}}$