

Exo 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer la formule du binôme, CàD $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$

Exo 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) dt$ ou bien pour ceux qui veulent changer $W_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$
> Calculer W_{n+1} en fonction de W_n .
> **Bonus** : En déduire (à la mode géo) la valeur de W_n

Exo 3. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{t(t+1)}$, puis avec le changement de variable $x^p = t$, calculer $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^p)} dx$

Exo 4. Soit (u_n) la suite définie par : $u = 1492$, $u_1 = 1515$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -4u_{n+1} - 4u_n$
> Calculer u_n en fonction de n .
> **Bonus indépendant et un peu long** : Soit (a_n) une suite vérifiant $a_{n+1} = 2a_n + 3$.
Vérifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une récurrence d'ordre 2. En déduire la valeur de u_n .

Correction de l'exo 2

$$\text{On trouve } W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n$$

$$\begin{aligned} \text{On a à la mode Géo } W_n &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-1} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \left[\frac{2n-3}{2n-2} W_{n-2} \right] \\ &= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \left[\frac{2n-5}{2n-4} W_{n-3} \right] \\ &\vdots \\ &= \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \dots \left[\frac{1}{2} W_0 \right] \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } W_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(3).(1)}{(2n)(2n-2)\dots(4).(2)} W_0$$

De plus

$$> P_{air} = (2n)(2n-2)\dots(4).(2) = 2^n \left[n.(n-1)\dots(2).1 \right] = 2^n . n!$$

$$> P_{air} \cdot I_{impair} = T_{ous} = [(2n)(2n-2)\dots(4).(2)] \cdot [(2n-1)(2n-3)\dots(3).(1)] = (2n)!$$

$$\text{Ainsi } I_{impair} = (2n-1)(2n-3)\dots(3).(1) = \frac{T_{ous}}{P_{air}} = \frac{(2n)!}{2^n . n!}$$

$$\textbf{Conclusion : } W_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(3).(1)}{(2n)(2n-2)\dots(4).(2)} W_0 = \frac{\frac{(2n)!}{2^n . n!}}{2^n . n!} W_0 = \frac{(2n)!}{(2^n . n!)^2} W_0$$

Correction du bonus de l'exo 4

$$\text{Pour pour/chaque } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } Eq1 : a_{n+1} = 2a_n + 3$$

$$Eq2 : a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3$$

$$\text{On soustrait Eq2-Eq1, ainsi on a } a_{n+2} - a_{n+1} = 2 \left[a_{n+1} - a_n \right]$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 3.a_{n+1} + 2.a_n = 0$$

> C'est une suite d'ordre 2 classique.

> Eq Caract

$$\text{on résout } X^2 - 3X + 2 = 0$$

$$\text{Comme } \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0,$$

$$\text{l'équation admet 2 racines distinctes } r = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = 2 \text{ et } r = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = 1$$

> D'après la théorie des suites, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda (2)^n + \mu (1)^n = \lambda (2)^n + \mu$$

> Bonus : On va calculer λ et μ avec $a_0 = 1492$ et $a_1 = 2.1492 + 3 = 2987$

$$Eq1 \ a_0 = 1492 = \lambda (2)^0 + \mu = \lambda + \mu$$

$$\text{et } Eq2 \ a_0 = 2987 = \lambda (2)^1 + \mu = 2.\lambda + \mu$$

$$\text{Ainsi Eq2-Eq1 : } \lambda = 2987 - 1492 = 1495 \text{ et } 2.Eq1 - Eq2 : \mu = 2 \times 1492 - 2987 = -3$$

$$\textbf{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \lambda (2)^n + \mu (1)^n = 1495 (2)^n - 3$$