

Exercice 1. [Correction] Soit la suite (A_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$

1. Une majoration.
 - (a) Démontrer que pour $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.
 - (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
 - (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln A_n \leq 2$ puis que $A_n \leq e^2$.
2. Une amélioration.
 - (a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.
 - (b) En déduire que $A_n \leq 4$.

Kulture

On peut démontrer que la suite (A_n) converge vers $\frac{1}{\pi} \left(\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2} \right) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \approx 3.68$.

La majoration par $e^2 \approx 7.39$ n'est pas mauvaise et celle par 4 est bonne.

Exercice 2. [Correction] Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On va montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$

1. Première méthode.
 - (a) Montrer que $\forall t > 0$, $t + \frac{1}{t} \geq 2$.
 - (b) Développer l'expression $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton puis en déduire le résultat attendu.
2. Deuxième méthode. On considère la fonction $f : t \mapsto (1+t)^n + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^n$
 - (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer et simplifier $f'(x)$.
 - (b) Déterminer sur $\mathbb{R}_+^*$ le signe de f' .
 - (c) Dresser le tableau des variations de f puis en déduire le résultat attendu.

Exercice 3. [Correction] On considère la suite (I_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$

1. Convergence de I_n .
 - (a) Montrer que : $\forall x \in [1, e]$, $\ln(x) \leq \frac{x}{e}$
 - (b) En déduire un encadrement de I_n , puis que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Ordre de grandeur de I_n .
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$
 - (b) En déduire la limite de $n I_n$ quand $n \rightarrow +\infty$. On commencera par ré-organiser l'égalité précédente.

Exercice 4. [Correction] On considère les suites (S_n) et (I_n) définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \quad \text{et} \quad S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

1. À l'aide d'un encadrement, montrer que : $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
2. Démontrer que : $\forall t \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$
 En déduire que : $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 - (-1)^n I_n$
3. Conclusion (à justifier et compléter) : La suite (S_n) converge vers

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) 1. Une majoration.

- (a) Démontrer que pour $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+$, ainsi $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq \underbrace{x}_{\text{Tangente}}$

- (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } k \geq 2, \text{ on a : } \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} &= \frac{k^2 - k(k-1) - (k-1)}{k^2} \\ &= \frac{k^2 - k^2 + k - k + 1}{k^2} = \frac{1}{k^2} \geq 0 \quad \text{Yes} \end{aligned}$$

- (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln A_n \leq 2$ puis que $A_n \leq e^2$.

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \text{ on a : } \ln(A_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

On applique Q1 avec $x = \frac{1}{k} \geq 0$

$$\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

On utilise la majoration précédente

Attention elle est valide pour $k \in \{2, 3, \dots, n\}$

Donc il faut séparer le plateau n°1

$$\leq \underbrace{1}_{k=1} + \sum_{k=2}^n \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Télescopage

$$\leq 1 + 1 - \frac{1}{n+1} \leq 2 - 0 = 2$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(A_n) \leq 2$ donc $A_n \leq e^2$

2. Une amélioration.

- (a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, $1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } k \geq 2, \text{ on a : } \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} - \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) &= \frac{k^2 \cdot k^2 - (k-1)(k+1) \cdot k^2 - (k-1)(k+1)}{(k-1)(k+1) \cdot k^2} \\ &= \frac{k^4 - k^4 + k^2 - k^2 + 1}{(k-1)(k+1) \cdot k^2} \\ &= \frac{1}{(k-1)(k+1) \cdot k^2} \geq 0 \quad \text{Yes} \end{aligned}$$

- (b) En déduire que : $A_n \leq 4$.

Pour tout $n \geq 1$, on a : $A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$

On utilise la majoration précédente

Attention elle est valide pour $k \in \{2, 3, \dots, n\}$

Donc il faut séparer le plateau n°1

$$\begin{aligned} &\leq \underbrace{2}_{k=1} \times \prod_{k=2}^n \underbrace{1 + \frac{1}{k^2}}_{\leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}} \\ &\leq \underbrace{2}_{k=1} \times \prod_{k=2}^n \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} \\ &\leq 2 \times \underbrace{\frac{2^2}{1 \times 3}}_{k=2} \times \underbrace{\frac{3^2}{2 \times 4}}_{k=3} \times \underbrace{\frac{4^2}{3 \times 5}}_{k=4} \cdots \times \underbrace{\frac{(n-1)^2}{(n-2) \times n}}_{k=n-1} \times \underbrace{\frac{n^2}{(n-1) \times (n+1)}}_{k=n} \end{aligned}$$

Télescopage

$$\begin{aligned} &\leq 2 \cdot \frac{2^2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{(n+1)} \\ &\leq 4 \times \frac{n}{n+1} \leq 4 \times \frac{n+1}{n+1} = 4 \quad \text{Yes!!} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Première méthode.

(a) Montrer que $\forall t > 0, t + \frac{1}{t} \geq 2$.

Pour tout $t > 0$, on a :

$$\left(t + \frac{1}{t}\right) - 2 = \frac{t^2 - 2t + 1}{t} = \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0 \quad \text{car } t > 0$$

(b) Développer l'expression $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton puis en déduire le résultat attendu.

Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n &= (1 + \gamma)^n + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)^n \quad \text{avec } \gamma = a/b \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{\gamma^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\gamma^k + \frac{1}{\gamma^k} \right] \\ &\quad \text{Or } \gamma^k + \frac{1}{\gamma^k} \geq 2 \text{ d'après Q1.a avec } t = \gamma^k > 0 \\ &\geq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [2] \\ &\geq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^k = 2(1+1)^n = 2^{n+1} \end{aligned}$$

2. Deuxième méthode. On considère la fonction $f : t \mapsto (1+t)^n + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^n$

(a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer et simplifier $f'(x)$.

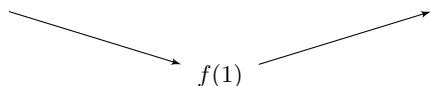
La fonction f est fabriquée avec les fonctions usuelles donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[(1+t)^n + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^n \right] \\ &= n(1+t)^{n-1} + \frac{-1}{t^2} n \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{n-1} \\ &= n(1+t)^{n-1} + \frac{-1}{t^2} n \left(\frac{t+1}{t}\right)^{n-1} \\ &= n(1+t)^{n-1} \left[1 - \frac{1}{t^{n+1}} \right] \\ &= n(1+t)^{n-1} \left[\frac{t^{n+1} - 1}{t^{n+1}} \right] \end{aligned}$$

(b) Dresser le tableau des variations de f puis en déduire le résultat attendu.

D'après les propriétés des monôme, on sait que : $t^{n+1} - 1 \geq 0$ Ssi $t \geq 1$

D'où le tableau

x	0	1	∞
$\text{sgn } f'$	-	0	+
f			

Conclusion : $\forall x > 0, f(t) \geq f(1) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

On applique cette inégalité avec $t = \frac{a}{b} > 0$, ainsi on a $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On définit pour tout entier n

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$

1. Convergence de I_n .

(a) Montrer que : $\forall x \in [1, e], \ln(x) \leq \frac{x}{e}$

On étudie la fonction h définie par $\forall t \geq 0, h : t \mapsto h(t) = \frac{t}{e} - \ln(t)$

(b) En déduire un encadrement de I_n , puis que la suite (I_n) converge vers 0.

On doit majorer une intégrale, on fait les 2 chevrons

> Pour tout/chaque $t \in [1, e]$, on a

$$x^2 (\ln x)^n \leq x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{x^{n+2}}{e^n}$$

> On intègre l'inégalité sur de $t = 1$ à $t = e$, ainsi

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx \leq \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n} dx \\ &\leq \left[\frac{1}{e^n} \frac{x^{n+3}}{n+3} \right]_1^e = \frac{e^{n+3} - 1}{e^n(n+3)} = \underbrace{\frac{e^3}{n+3}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} - \underbrace{\frac{1}{e^n(n+3)}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} \end{aligned}$$

De plus on a facilement $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$

Donc avec le théorème des 2 gendarmes, on conclut que la suite (I_n) converge vers 0.

2. Détermination de la limite la suite (nI_n) .

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$

On fait une IPP.

(b) En déduire la limite de nI_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Le texte demande d'étudier nI_n donc on ré-organise nI_n CàD

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{3} I_n &= \frac{e^3}{3} - I_{n+1} \\ \implies nI_n &= e^3 - 3 \underbrace{I_{n+1}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} - \underbrace{I_n}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} \end{aligned}$$

Conclusion : La suite (I_n) converge vers e^3 .

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Étude de (I_n) .

(a) À l'aide d'un encadrement, montrer que : $I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Pour encadrer l'intégrale, on chevronne

> Pour tout/chaque $t \in [0, 1]$

$$\frac{0}{1+1} \leq \frac{t^n}{1+t} \leq \frac{t^n}{1+0}$$

> J'intègre l'inégalité sur $[0, 1]$

$$\text{Ainsi } 0 \leq I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\text{Or } \int_0^1 t^n dt = [\text{Primitive}]_0^1 = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

(b) C'est le théorème des 2 gendarmes.

2. Démontrer que : $\forall t \geq 0, \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$

On reconnait une Somme géo.

$$\text{En déduire que : } S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 - (-1)^n I_n$$

$$\text{On remarque que : } \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$$

On intègre l'égalité de la question précédent sur $[0, 1]$, ainsi

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \int_0^1 \left[1 - t + t^2 - \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \right] dt$$

> A Gauche : c'est égale à $\ln(2)$

> A Droite : On distribue l'intégrale, ainsi c'est égale $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + (-1)^n I_n$

Conclusion : On a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \ln 2 - (-1)^n I_n$

3. Conclusion (à justifier et compléter) : La suite (S_n) converge vers

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$, on peut conclure que la suite (S_n) converge vers $\ln(2)$

On vient de justifier que : $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{1492}}{1492} + \dots + \text{jusqu'à l'infini.}$