TD 5 Trigo.

Mercredi 08 Octobre 2025.

Trigo

Exercice 1. Soit $n \geqslant 2$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On considère, pour $n \geqslant 2$, les nombres $P_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $g_n = P_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1. Calculer g_{n+1} en fonction de g_n
2. En déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ P_n = \dfrac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
3. On admet que $\lim_{\square \to 0} \dfrac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

Exercice 2. [Correction] Soit $n \geqslant 2$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On considère, pour $n \geqslant 2$, les nombres $P_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $g_n = P_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1. Simplifier $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$. En déduire que : $\forall n \geqslant 2,\ P_n = \dfrac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
2. On admet que $\lim_{\square \to 0} \dfrac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

Exercice 3. [Correction] Soit $n \geqslant 2$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On considère, pour $n \geqslant 2$, les nombres $P_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $g_n = P_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2,\ P_n = \dfrac{1}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
2. On admet que $\lim_{\square \to 0} \dfrac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

Exercice 4. [Correction] Une jolie formule

$>$ Justifier que : $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$>$ Démontrer par récurrence que $Si\ n \geqslant 2$,

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^n} \qquad \text{Il y a } (n-1) \text{ symboles } \sqrt{\ldots}$$

Arc-Trigo

Exercice 5. *Les questions sont indépendantes.*

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. Montrer que : $\forall\, x \in [-1,1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$
3. Démontrer que : $\forall\, x \in [0,1]\,,\ \arcsin\sqrt{x} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$
4. Montrer que : $\forall\, x \geqslant 0,\ \dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan(x)$

Exercice 6. [Correction] On va montrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

1. Méthode 1. A l'aide d'une étude de fonction, montrer l'égalité.
2. Méthode 2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Je note : $A = \arctan\left(\dfrac{1}{1+p+p^2}\right)$ et $B = \arctan(p+1) - \arctan(p)$.

   Montrer que A et B sont des solutions de l'équation $\tan(X) = \dfrac{1}{1+p+p^2}$

   Encadrer A et B. Conclure.
3. Application : Simplifier puis calculer la limite quand $n \to \infty$ de : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$

Exercice 7. [Correction] On considère la fonction $h : x \longmapsto \arcsin(x) + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

1. Déterminer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
2. Calculer et simplifier h'
3. En déduire une expression simplifiée de $h(x)$

Suite classique d'ordre 2

Exercice 8. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer **par récurrence** qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que

   $$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

   On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   Calculer a_0, b_0, et a_1, b_1.
2. Montrer que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2.
   En déduire a_n en fonction de n.
3. Montrer que $\forall n,\ \ a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.
   En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On a
$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha.$$
C'est les dominos multiplicatifs
$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{2.\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)}\right)$$
$$= \text{..Dominos..} = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}} == \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}$$

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \dfrac{1}{\infty\sin(0)}$, c'est une FI avec $\sin(0)$ donc va utiliser l'approximation linéaire.
$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}[\square + o(\square)]}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2} + o\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Récurrence
2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \dfrac{1}{\infty\sin(0)}$, c'est une FI avec $\sin(0)$ donc va utiliser l'approximation linéaire.
$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}[\square + o(\square)]}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2} + o\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) On fait pat récurrence
$$H\langle n\rangle : \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^n} \qquad \text{Il y a } (n-1) \text{ symboles } \sqrt{...}$$
L'initialisation est facile, on fait l'hérédité.

$\rightarrow$ $\underline{H\langle n\rangle \Rightarrow H\langle n+1\rangle\ ?}$
On suppose $H\langle n\rangle$,

On veut montrer $H\langle n+1\rangle$
On espère avoir $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$

On a
$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}} &= \sqrt{2+\text{(Ici on reconnait } H\langle n\rangle)}\\ &= \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^n}}\\ &= \text{Intermédiaire}\\ &= \text{.....formule trigo (duplication) ....} = Final\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 **(Énoncé)** 1. On va montrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

(a) Méthode 1. On étudie la fonction h définie par l'expression

$$h : x \longmapsto f(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

La fonction est dérivable sur $\mathscr{D}' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ h'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)\right] \\
&= [1+x]'\,\frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+(x)^2} - \left[\frac{1}{1+x+x^2}\right]'\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} - (1+2x)\frac{-1}{(1+x+x^2)^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2+2x+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2} \\
&= \frac{-1-2x}{(2+2x+x^2)(1+x^2)} + \frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2} \\
&\quad \textit{Or on remarque que : } (2+2x+x^2)(1+x^2) = \cdots \\
&\qquad \textit{et } 1+(1+x+x^2)^2 = \cdots \\
&\quad \textit{Donc c'est égal !!!!!} \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où le tableau

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ ∞
$g'(x)$	0
$g(x)$	$\longrightarrow$

La fonction est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = \cdots = 0$ donc la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}$.

(b) Méthode 2. Je note : $A = \arctan\left(\dfrac{1}{1+p+p^2}\right)$ et $B = \arctan(p+1) - \arctan(p)$.

Rappel : On sait $\arctan(a)$ est une solution de l'équation $\tan(x) = a$

Ainsi ainsi : $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(a)) = a$.

$>$ On a $\tan(A) = \dfrac{1}{1+p+p^2}$.

$>$ De même, on a $\tan(B) = \tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y} = \dfrac{1/(p+1) - 1/p}{1 - \frac{1}{(p+1)p}} = \dfrac{1}{1+p+p^2}$

Donc A et B sont solutions de l'équation $\tan(X) = \dfrac{1}{1+p+p^2}$

$>$ De plus la fonction Arc-tangente est croissante et impaire, on a donc $0 \leqslant \arctan(p) \leqslant \arctan(p+1) < \dfrac{\pi}{2}$

Ainsi $0 < A < \dfrac{\pi}{2}$ et $0 < B < \dfrac{\pi}{2}$

$>$ Enfin on sait que les solution de l'équation $\tan(X) = m$ sont de la forme $X \equiv X_0 \mod [\pi]$.

Donc sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, l'équation $\tan(X) = \dfrac{1}{1+p+p^2}$ admet une unique solution.

Conclusion : $A = B$

Solution de l'exercice 7 **(Énoncé)** calcul et simplification de f'

On a

$$\forall\, x \in \mathscr{D}', \quad f'(x) = \frac{d}{dx}[\arcsin'(x)] + \frac{d}{dx}[\arcsin\sqrt{1-x^2}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]' \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[1 - \frac{x}{|x|}\right]$$

On discute selon le signe de x.

$$\begin{cases} Si\ x \quad \in \mathscr{D}' \text{ et } x > 0,\ alors\ |x| = +x\ et \quad f'(x) = 0 \\ \\ Si\ x \quad \in \mathscr{D}' \text{ et } x < 0,,\ alors\ |x| = -x\ et \quad f'(x) = 2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin'(x) \end{cases}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. On démontre par récurrence

$$H\langle n\rangle : \Big| \text{ Il existe deux entiers } a_n \text{ et } b_n \text{tels que } \left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

Initialisation

On a $(2+\sqrt{3})^0 = 1$ je choisis $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

Hérédité Je suppose que $H_{<n>}$ est vrai.

$$\boxed{\text{On veut trouver } a_{n+1} \text{ et } b_{n+1} \text{ entier tel que } \left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}}$$

On veut avoir

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1} &= \left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2+\sqrt{3}\right)\\ &\text{On utilise } H\langle n\rangle\\ &= \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\\ \\ &= [2a_n + 3b_n] + \sqrt{3}\,[a_n + 2b_n]\end{aligned}$$

Je choisis $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ et ce sont bien des entiers ! ! !

De plus

$\left(2+\sqrt{3}\right)^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

$\left(2+\sqrt{3}\right)^1 = 2+\sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2$ et $b_1 = 1$

2. On sait que $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. On va utiliser l'autre relation de récurrence pour calculer b_n est b_{n+1} en fonction des termes de la suite (a_n)

$$\begin{gathered}a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \Rightarrow b_n = \ldots\\ \text{et}\\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = \ldots\end{gathered}$$

L'égalité $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ devient (après simplification) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$.

3. La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Équation caractéristique.

On doit résoudre $X^2 - 4X + 1 = 0$.
Après calcul,on trouve que : Les racines sont $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$.

On sait d'après la théorie des suites, qu'il existe 2 scalaires λ et μ tq

$$a_n = \lambda\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \mu\left(2-\sqrt{3}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a sait de plus que

$$\left.\begin{aligned}a_0 = 1 &\Rightarrow \lambda + \mu = 1\\ a_1 = 2 &\Rightarrow \lambda\left(2+\sqrt{3}\right) + \mu\left(2-\sqrt{3}\right) = 2\end{aligned}\right\} \text{ ainsi } \lambda = \mu = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } a_n = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. On fait par récurrence (1 étage) : $H_{<n>} : (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{3}\right)^n &= a_n + b_n\sqrt{3}\\ &\text{Or } a_n, b_n \text{ sont } >0\\ &= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{3\,(b_n)^2}\\ &\text{Or } (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1\\ &= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{(a_n)^2 - 1}\\ &= \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1} \quad \text{avec } N_0 = (a_n)^2\end{aligned}$$