Programme de colle de la semaine 5

du Lundi 13 Octobre au Vendredi 17 Octobre.

Questions de cours.

> Changement de Variable.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ avec le changement $x = \sin(t)$

> Polynôme de Chebychev.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un polynôme T_n tel que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n\left(\cos(\theta)\right) = \cos(n\theta)$

Vous pouvez faire seulement $n = 4$.

Indication / Rappel : $\cos(n\theta) = Re\left(e^{i\,n\theta}\right)$

> Somme de trigo. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

Soit $k \in \{0, 1, .., n-1\}$. Justifier, avec l'angle moitié, que : $\left|\omega^k - 1\right| = 2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

Montrer que : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left|\omega^k - 1\right| = \dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Pour calculer S_n, on peut Soit utiliser : $\sin\square = Im\left(e^{i\square}\right)$ *Soit utiliser la clef qui est en Bas*

> Tangente

Définition Tangente et Tangente Principales. Propriétés de la fonction tangente.

Démonstration que Tangente est π-périodique.

Dérivée de tan

Calcul de $\tan(a+b)\tan(a-b)$ et $\tan(2x)$.

> Trigo et changement de variable. On pose $u = \tan\left({}^{t}/_{2}\right)$

Montrer que : $dt = \dfrac{2}{1+u^2}du$, $\tan(t) = \dfrac{2u}{1-u^2}$, $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$

> Arc-Tangente.

Définition et propriétés évidentes de $\arctan(a)$

Propriétés de la fonction arctan, CàD : Graphe, monotonie, parité, dérivabilité et dérivée

Démonstration de l'imparité

Démonstration de $\forall\, x \in \mathscr{D},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

> Pour public averti et donc Bonus

(Re)-lire et faire la démonstration de $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Application : Simplifier $\tan\Big(\arccos(x)\Big)$ et $\sin\Big(\arctan(x)\Big)$.

Exercices.

On a fait arc-trigo, donc c'est un bon prétexte pour faire des étude de fonctions, CàD $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$, calcul et simplification de dérivée.

On peut aussi faire tellement de choses autour de arctan sur le modèle de la formule de J.Machin.