L'exercice 1 : C'est l'objectif **donc à faire**. Je le donne chaque année et plusieurs fois en DS et DM, niveau moyen.
La dernière question 3.b n'est pas essentielle (c'est une limite et on n'a pas fait les limites)

L'exercice 2 :

> Partie 1 : Très classique, niveau moyen **à faire**.
> Partie 2 : moyen plus/difficile moins. **très facultatif**
> Partie 3 : Difficile **très, très facultatif**

Exercice 1. [Correction] On considère la fonction de la variable réelle

$$D : x \longmapsto D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

Pour tout/chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\underbrace{t \longmapsto e^{t^2}}$ est continue sur $[0, x]$
donc l'intégrale $\int_0^x e^{t^2} dt$ se calcule. `Conclusion (admise) : la fonction` D `est définie sur` $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

1. Étudier la parité de D, CàD calculer $D(-x)$ en fonction de de $D(x)$
2. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad xe^{-x^2} \leqslant D(x) \leqslant x$.
3. Ordre de grandeur de $D(x)$ quand $x \to \infty$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt.$
   (b) Soit la fonction $h : t \mapsto \frac{e^t}{t}$.
      i. Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$.
      ii. En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[\,, \quad \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leqslant \frac{e^{x^2}}{x^2} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt,$
      iii. À l'aide du théorème des gendarmes, montrer que $\dfrac{\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt}{e^{x^2}/2x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$
   (c) Déduire de ce qui précède que : l'expression $2x\, D(x)$ tend vers 1 quand $x \to \infty$.

Exercice 2. [Correction] L'objectif de ce problème est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 1. Inégalité de Hardy

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

Partie I : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Augustin Louis Cauchy (mathématicien français, 1789-1857), Hermann Amandus Schwarz (mathématicien allemand, 1843-1921)

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sont des nombres réels quelconques.
On va de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, CàD

$$\forall\, (x_1, .., x_n, y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

1. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie lorsque $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
2. On suppose que les réels $x_1, .., x_n$ sont non tous nuls ainsi un (ou plus) des x_k n'est pas nul.
   On considère la fonction P définie par $\forall\, t \in \mathbb{R},\ P(t) = \sum_{k=1}^n (x_k\, t + y_k)^2$.
   (a) Montrer que P est un polynôme de degré 2 et déterminer ses coefficients.
   (b) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. En déduire l'inégalité.
   (c) Bonus : A-t-on utilisé l'hypothèse : les réels $x_1, .., x_n$ sont non tous nuls ?

Partie II : Inégalité de Hardy

Godfrey Harold Hardy (1877-1947, mathématicien britannique)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on pose :

$$S_k = a_1 + \cdots + a_k = \sum_{p=1}^{k} a_p$$

1. Un exemple. Dans cette question uniquement, on suppose que : $\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ a_k = k(k+1)$
   (a) Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, calculer S_k.
   (b) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.
   (c) Montrer alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$

On revient ici au cas général : $a_1, \dots, a_n$ désignent des nombres réels strictement positifs quelconques.

2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \quad \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right) \left(\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right)$$

3. En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \quad \dfrac{k}{S_k} \leqslant \dfrac{4}{k(k+1)^2} \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}$

4. Montrer alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4 \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{p^2}{a_p} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}\right)$

   Attention : Pour faire ce calcul, il faut utiliser/admettre que sans modifier le plateau, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{k} .....\right) = \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{k=p}^{n} ......\right)$

5. Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$

6. En déduire l'inégalité de Hardy.

Partie III : Optimalité de la constante 2 dans l'inégalité de Hardy

Le but de cette dernière partie est de démontrer que :
la constante 2 du membre de droite de l'inégalité de Hardy est optimale.

On considère ici un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}_+$vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

L'objectif est de montrer qu'on a nécessairement $\lambda \geqslant 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{e}^{H_n} \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$
2. En déduire que $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
3. En considérant la suite $(a_k)_{k \geqslant 1}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = k$.
   Montrer que $\lambda \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a $f(-x) = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^{-x} e^{t^2}\, dt$.

   On fait le changement de variable $u = -t$

   $$\text{Ainsi on obtient} \quad \int_0^{-x} e^{t^2}\, dt = -\int_0^{x} e^{u^2}\, du.$$

   Ainsi $\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = -f(x)$. La fonction f est donc impaire.

2. Pour tour $x > 0$.

   $> \forall t \in [0, x],\ e^0 \leqslant e^{t^2} \leqslant e^{x^2}$

   $>$ On intègre l'inégalité sur $[0, x]$

   Ainsi $x \leqslant \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt \leqslant x.e^{x^2}$.

   On en déduit l'encadrement en multipliant par $e^{-x^2} > 0$.

3. (a) Ipp en partant de $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$

   (b) Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$.

   i. La fonction h est dérivable sur $\mathscr{D} = [1, \infty[$.

   $$\text{De plus } \forall t \geqslant 1,\ f'(t) = \left[\frac{e^t}{t}\right]' = \frac{e^t.t - e^t}{(t)^2} = \frac{e^{t^2}(t-1)}{... > 0} \underbrace{\geqslant 0}_{\text{car } t \geqslant 1}$$

   Donc la fonction est croissante sur l'intervalle $\mathscr{D}$.

   ii. Soit $x > 1$, on a

   $> \forall t \in [1, x],\ \dfrac{e^{t^2}}{t^4} = \dfrac{e^{t^2}}{t^2}\dfrac{1}{t^2} = h(t^2)\dfrac{1}{t^2} \leqslant h(x^2)\dfrac{1}{t^2}$ car la fonction h est croissante et $t^2 \leqslant x^2$

   $>$ On intègre l'inégalité sur $[1, x]$

   $$\text{Ainsi} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leqslant \int_1^x h(x^2)\frac{1}{t^2} dt = h(x^2) \underbrace{\int_1^x \frac{1}{t^2} dt}_{=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}} = \frac{e^{x^2}}{x^2}\frac{x-1}{x}$$

   iii. On a facilement $Quotient = \dfrac{petit}{Gros} = \dfrac{\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt}{e^{t^2}/2t} = \dfrac{positif}{positif} \geqslant 0$

   $$\text{Ainsi} \quad 0 \leqslant Quotient = \frac{petit}{Gros} \leqslant \frac{\frac{e^{x^2}}{x^2}\frac{x-1}{x}}{e^{x^2}/2x} = \underbrace{\frac{2(x-1)}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0}$$

   Ainsi le théorème des gendarmes assure que $Quotient \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

   (c) *Le Texte dit implicitement de remplacer* $\displaystyle\int_1^x e^{t^2} dt$ *par* $\dfrac{e^{x^2}}{2x} + \dfrac{e^{x^2}}{4x^3} - \dfrac{3e}{4} + \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$.

   On va le faire dans $D(x)$ puis dans $2xD(x)$,

   $$\begin{aligned} D(x) &= e^{-x^2}\left(\int_0^1 e^{t^2} dt + \int_1^x e^{t^2} dt\right) \\ &= e^{-x^2}\left(Konstante + \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt\right) \\ &= K\, e^{-x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} - \frac{3e}{4}\, e^{-x^2} + \frac{3}{4} e^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \end{aligned}$$

   $$\textit{Ainsi } 2x\, D(x) = \underbrace{K\, 2x\, e^{-x^2}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0} + 1 + \underbrace{\frac{2x}{4x^3}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{3e}{4}\, e^{-x^2}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0} + \frac{3}{4} \underbrace{2x\, e^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt}_{\xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \text{ voir ci dessus Q3b.iii}}$$

Conclusion : $2x\, D(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$.

Solution de l'exercice 2 **(Énoncé)**

Partie I : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Augustin Louis Cauchy (mathématicien français, 1789-1857), Hermann Amandus Schwarz (mathématicien allemand, 1843-1921)

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sont des nombres réels quelconques.
On va de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, CàD

$$\forall\,(x_1,..,x_n,y_1,..,y_n)\in\mathbb{R}^{2n},\ \left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)$$

1. On suppose que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, aisnsi on a
   > $\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}0y_k\right)^2=0^2=0$
   > $\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}0^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)=0.\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)=0$

   Donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie.
2. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie lorsque $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
   > On a $P(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)t^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}x_k.y_k\right)t+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)$

   P est bien un poly de degré 2.

   > Comme $P(t)=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left[x_k\,t+y_k\right]^2}_{\geqslant 0}\geqslant 0$

   P est un poly de degré 2, toujours positif.

   $$\text{Conclusion : }\Delta\leqslant 0,\ \text{CàD }\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leqslant 0$$

   Donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie.

   L'hypothèse "les réels $x_1, .., x_n$ sont non tous nuls" est utilisé pour justifier que P est vraiment de degré 2 (et pas de seulement de degré $\leqslant 2$)

Partie II : Inégalité de Hardy

Godfrey Harold Hardy (1877-1947, mathématicien britannique)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on pose :

$$S_k = a_1+\cdots+a_k=\sum_{p=1}^{k}a_p$$

1. Un exemple. Dans cette question uniquement, on suppose que : $\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ a_k = k(k+1)$
   (a) Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, On a

   $$S_k=\sum_{p=1}^{k}p(p+1)=\sum_{p=1}^{k}p^2+\sum_{p=1}^{k}p=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}\left(\frac{2k+1}{3}+1\right)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

   (b) On a

   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}$$

   (c) On a pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{k}{a_1+\cdots+a_k}=\dfrac{k}{\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}}=\dfrac{3}{(k+1)(k+2)}$

   Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+\cdots+a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(k+1)(k+2)}=3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=3\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right]=\frac{3n}{n+2}$

$$\text{Comme } 2\frac{n+2}{n+1} - \frac{3n}{n+2} = \frac{2(n+2)^2 - 3n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

donc dans cette situation particulière, on a bien : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$

$\boxed{\text{On revient ici au cas général : } a_1, \dots, a_n \text{ désignent des nombres réels strictement positifs quelconques.}}$

2. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $x_p = a_p > 0$ et $y_p = \dfrac{p}{a_p} > 0$, ainsi

$$\left(\sum_{p=1}^{k} a_p \times \frac{p}{a_p}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right)\left(\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right)$$

Comme $\displaystyle\left(\sum_{p=1}^{k} a_p \times \frac{p}{a_p}\right)^2 = \left(\sum_{p=1}^{k} p\right)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$, on a l'inégalité.

3. Pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on a

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \leqslant \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right)}_{=S_k}\left(\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right)$$

Donc $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\quad \displaystyle\frac{k}{S_k} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}$

4. On somme l'inégalité précédente de $k = 1$ à $k = n$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{S_k} &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\left[\frac{4}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p}\right] \\
&\textit{On intervertit les sommes ainsi on a} \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n}\left[\frac{4}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p}\right] \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n}\left[\frac{4}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p}\right] \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^{n}\left[\frac{4}{k(k+1)^2}\right]\right)
\end{aligned}$$

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] - \frac{2}{k(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2 - 2k}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2(k+1)^2} > 0$$

6. Avec un télescopage, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=p}^{n}\left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right] = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{p^2}$

Ainsi on peut poursuivre le calcul précédent

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{S_k} &\leqslant \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^{n}\left[\frac{4}{k(k+1)^2}\right]\right) \\
&\leqslant \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{p^2}{a_p}\frac{2}{p^2}\right) \\
&\leqslant 2\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{a_p}
\end{aligned}$$

Donc l'inégalité de Hardy est vraie.

Partie III : Optimalité de la constante 2 dans l'inégalité de Hardy

Le but de cette dernière partie est de démontrer que :

la constante 2 du membre de droite de l'inégalité de Hardy est optimale.

On considère ici un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}_+$vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

L'objectif est de montrer qu'on a nécessairement $\lambda \geqslant 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{e}^{H_n} \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

Attention : Il faudra utiliser l'inégalité de convexité : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$e^{H_n} = exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$
$$= \prod_{k=1}^{n} exp\left(\frac{1}{k}\right)$$

On utilise l'inégalié de convexité avec $x = \frac{1}{k} > 0$

$$\geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

2. En déduire que $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

On a le télescopage $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{2}{1}\frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n+1$

Ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1$

Conclusion : $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

3. En considérant la suite $(a_k)_{k \geqslant 1}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = k$. Montrer que $\lambda \geqslant 2$.

On suppose que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = k$. Ainsi on a

$> \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$

$> a_1 + \cdots + a_k = 1 + 2 + \cdots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\frac{k(k+1)}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+1} = 2\sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} = 2\left[H_n + \frac{1}{n+1} - \underset{p=1}{\frac{1}{\sqcup}}\right]$

L'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ Devient

$$2\left[H_n + \frac{1}{n+1} - \underset{p=1}{\frac{1}{\sqcup}}\right] \leqslant \lambda\, H_n$$
$$\implies 2\left[1 + \frac{1}{(n+1)H_n} - \frac{1}{H_n}\right] \leqslant \lambda$$

On regarde quand $n \to \infty$, ainsi on a $2 \leqslant \lambda$