

Exercice 1. [Correction] On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$$

1. Montrer que le graphe de la fonction f admet la droite $x = \frac{1}{2}$ pour axe de symétrie.
2. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition et $\mathcal{D}'$, l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .
Déterminer et simplifier f' .
3. Variation.
> Résoudre l'inégalité : $\frac{x}{1-x} \geq 1$. En déduire les variations de la fonction f .
> On admet que : $\lim_{\square \rightarrow 0^+} [\square \ln(\square)] = 0$, en déduire les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.
4. En déduire, sur $\mathcal{D}$, un encadrement de $x^x (1-x)^{1-x}$

Exercice 2. [Correction] Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \in \{1, \dots, n\}$. On considère $u_k = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$

1. Simplifier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ puis justifier que : $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, u_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.
3. Application : Montrer, en utilisant la formule du binôme et Q2, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$

Exercice 3. [Correction] On considère la suite (A_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, 1 + x \leq e^x$.
2. En déduire un majorant pour la suite (A_n) , CàD déterminer K tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n \leq K$

Exercice 4. [Correction] Soit $n \geq 2$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$

On note

$$> G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}, \text{ c'est la moyenne géométrique}$$

$$> M = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \text{ c'est la moyenne arithmétique.}$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique, CàD

$$G \leq M, \text{ CàD } \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

1. Montrer que : $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$
2. Vérifier que : $\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{M} - 1\right) = 0$
3. À l'aide des questions précédentes, montrer que : $G \leq M$

Exercice 5. [Correction] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}}{k}$ On convient que $\binom{n}{n+1} = 0$

2. Montrer que : $\forall n, k \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq k \leq n$

$$\frac{1}{k} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k}$$

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$

4. Montrer que : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Exercice 6. [Correction] On considère la suite (I_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} dt$$

1. Calculer I_0 et I_2 . Calculer I_1 avec le changement de variable $u = 1+t$

2. Montrer que la suite (I_n) croissante, CàD Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $I_{n+1} - I_n$

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt$. Remarque : Ce n'est pas une IPP.

4. Montrer, à l'aide d'un encadrement, que : $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Que peut-on en déduire ?

5. En peu plus précis.

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt = \frac{\ln 2}{n} - \frac{2}{n} \int_0^1 t \ln(1+t^n) dt$

(b) Montrer que : $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$

puis montrer, à l'aide d'un encadrement, que : $\int_0^1 t \ln(1+t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(c) En déduire la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de : $n \left(I_n - \frac{1}{2} \right)$

Exercice 7. [Correction] On considère la suite (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

1. Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) On considère la fonction $h : x \mapsto (n+1) \ln \left(\frac{x+1}{n+1}\right) - n \ln \left(\frac{x}{n}\right)$.

Montrer que la fonction h est positive sur $[1, n]$.

(b) En déduire que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}$

puis que la suite (S_n) est monotone.

2. Majoration.

(a) Montrer que : $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$

(b) En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq e^{k-n}$.

(c) En déduire que la suite (S_n) est majorée par $\frac{e}{e-1}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Montrer que le graphe de la fonction f admet la droite $x = \frac{1}{2}$ pour axe de symétrie.

Comme $f\left(\frac{1}{2} - h\right) = \dots$ et $f\left(\frac{1}{2} + h\right) = \dots$, on a bien égalité. Ce qui conclut.

2. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition et $\mathcal{D}'$, l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .

On peut calculer le nombre $f(x)$ Ssi $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$

Donc la fonction f est définie sur $\mathcal{D} =]0, 1[$

De plus la fonction f est fabriquée avec les fonctions classiques et les opérations usuelles, ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

Déterminer et simplifier f' .

On a $\forall x \in \mathcal{D}$, $f'(x) = \ln(x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

3. Résoudre l'inégalité : $\frac{X}{1-X} \geq 1$. En déduire les variations de la fonction f .

On a

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} \geq 1 &\iff \frac{x}{1-x} - 1 \geq 0 \\ &\iff \frac{2x-1}{1-x} \geq 0 \end{aligned}$$

On fait un bô tableau de signe

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$\frac{2x-1}{1-x}$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$

$$\iff x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$$

$$\text{On a : } f'(x) \geq 0 \iff \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \geq 0 \iff \frac{x}{1-x} \geq 1 \iff x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$$

Préciser les limites aux borne de $\mathcal{D}$

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)) = 0 + 0 = 0$$

et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ à cause de la symétrie.

Ainsi on a le tableau

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0	$-\ln(2)$	0

4. En déduire, sur $\mathcal{D}$, un encadrement de $x^x (1-x)^{1-x}$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $x^x (1-x)^{1-x} = e^{x \ln(x)} e^{(1-x) \ln(1-x)} = e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)} = e^{f(x)}$

Le tableau de variation assure que : $\forall x \in \mathcal{D}$, $-\ln(2) \leq f(x) \leq 0$,

$$\text{Ainsi on a } \forall x \in \mathcal{D}, \underbrace{e^{-\ln 2}}_{=1/2} \leq x^x (1-x)^{1-x} \leq \underbrace{e^0}_{=1}$$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Simplifier $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ puis justifier que : $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2}$.

On a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1}{n^{k+1}} \binom{n}{k+1}}{\frac{1}{n^k} \binom{n}{k}} = \frac{n^k}{n^{k+1}} \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{1}{n} \frac{n-k}{k+1}$$

On a

$$G - p = \frac{1}{2} - \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \frac{n-k}{k+1} = \frac{n(k+1) - 2(n-k)}{n(k+1)} = \frac{n(k-1) + 2k}{n(k+1)} \geq 0 \quad \text{car } k \geq 1$$

2. En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, u_k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

À la mode geo ou récurrence

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Facile : Différence avec $e^x - 1 = e^x - e^0$ OU BIEN étude de fonction.

2. On va majorer le produit A_n .

> Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq e^{\frac{k}{n^2}} \text{ On utilise Q1 avec } x = k/n^2 > 0.$$

> On "produise" de $k = 1$ à $k = n$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } A_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \prod_{k=1}^n e^{\frac{k}{n^2}} \\ &\leq \underbrace{e^{\frac{1}{n^2}}}_{\text{}} \underbrace{e^{\frac{2}{n^2}}}_{\text{}} \cdots \underbrace{e^{\frac{n}{n^2}}}_{\text{}} \\ &\leq e^{\frac{1+2+\dots+n}{n^2}} \\ &\leq \exp\left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\right) \\ &\leq \underbrace{\exp\left(\frac{n+1}{2n}\right)}_{\text{Attention ça dépend de } n} \leq \exp\left(\frac{n+n}{2n}\right) = e^1 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$

On étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $h : x \mapsto x - 1 - \ln(x)$

2. Vérifier que : $\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{M} - 1 \right) = \mathcal{O}$

On a

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{M} - 1 \right) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{M} nM - n = 0$$

3. On applique Q1 avec $\frac{x_k}{M} - 1$, puis on somme de $k = 1$ à $k = n$, ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{x_k}{M} \right) &\leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{M} - 1 \right) = 0 \\ \implies \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{x_k}{M} \right) &\leq 0 \\ \implies \frac{\prod_{k=1}^n x_k}{M^n} &\leq 1 \\ \implies \prod_{k=1}^n x_k &\leq M^n \\ \implies \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} &\leq M \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. A cause de la convention, $\binom{n}{n+1} = 0$

$$\text{ainsi } S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$$

On a donc

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k}}{k} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\binom{n}{k}}{k}$$

On regroupe les sommes

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}}{k}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right] &= \frac{1}{k} \left[\frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!} - \frac{(n)!}{k! (n-k)!} \right] \\ &= \frac{1}{k} \frac{(n)!}{k! (n-k)!} \left[\frac{(n+1)}{(n+1-k)} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{k} \frac{(n)!}{k! (n-k)!} \left[\frac{k}{(n+1-k)} \right] \\ &= \frac{(n)!}{k! (n+1-k)!} = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

3. On a donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \\ &= \frac{-1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k - \underbrace{1}_{k=0} \right] = \frac{-1}{n+1} [(1-1)^{n+1} - 1] = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

On a maintenant

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \frac{1}{n} \\ S_{n-1} - S_{n-2} &= \frac{1}{n-1} \\ &\vdots \\ S_2 - S_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On somme les égalités et on simplifie ainsi

$$S_n - S_1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow S_n = S_1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On considère la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} dt$$

1. On a

$$I_0 = \int_0^1 \frac{t}{1+1} dt = \int_0^1 \text{Monome } dt$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{n'}{n} dt$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 [\text{Décomposition en élément simple}] dt$$

2. On a

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{t}{1+t^{n+1}} dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^n} dt$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{t}{1+t^{n+1}} - \frac{t}{1+t^n} \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[t \frac{(1+t^n) - (1+t^{n+1})}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[t \frac{t^n - t^{n+1}}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[t.t^n \frac{1-t}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} \right] dt$$

$$\text{Or } \left[t.t^n \frac{1-t}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} \right] \text{ est } \geq 0 \quad \text{sur } [0, 1] \\ \text{donc l'intégrale est } \geq 0 \text{ Fini}$$

3. On a $\int_0^1 t \, dt = \dots = \frac{1}{2}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt &= \int_0^1 t \, dt - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \\ &= \int_0^1 \left[t - \frac{t^{n+1}}{1+t^n} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{t(1+t^n) - t^{n+1}}{1+t^n} \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{t}{1+t^n} \right] dt = I_n \end{aligned}$$

4. On a

Si $t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^n} \leq \frac{t^{n+1}}{1+0} = t^{n+1}$
On intègre l'inégalité sur $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } 0 \leq I_n - \frac{1}{2} &\leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^n} dt \\ &\leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Comme $\text{Majoration} = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a avec le théorème des deux gendarmes $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

5. En peu plus précis.

(a) On fait une IPP

$$u' = \frac{t^{n-1}}{1+t^n} \rightsquigarrow u = \frac{1}{n} \ln(1+t^n)$$

$$v = t^2 \rightsquigarrow v' = 2t$$

A finir

(b) On utilise les intégrales avec $\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln 1 = \int_1^{1+x} \frac{1}{t} dt$

(c) On va montrer que :

$$\text{Quotient} = \frac{\text{Petit}}{\text{gros}} = \int_0^1 t \ln(1+t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On utilise l'inégalité précédente,

ainsi $t \in [0, 1]$, $0 \leq t \ln(1+t^n) \leq t.t^n$

On intègre l'inégalité sur $[0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{On a } 0 \leq \int_0^1 t \ln(1+t^n) dt &\leq \int_0^1 t.t^n dt \\ &\leq \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Avec le théorème des 2 gendarmes $\int_0^1 t \ln(1+t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Fini.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Étude de fonction et tableau de signe.

(b) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Comme la fonction $\ln$ est croissante, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{k}{n}\right)^n &\leq \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} \iff \ln\left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \ln\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &\iff h(k) \geq 0 \text{ Fini}\end{aligned}$$

On a $S_{n+1} - S_n = \dots \geq 0$

2. Majoration.

(a) On étudie la fonction $h : x \mapsto (x-1) - \ln(x)$

(b) Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n = e^{n \ln(k/n)} \leq e^{n(k/n - 1)} = e^{k-n}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n \leq \sum_{k=1}^n e^{k-n} \\ &\leq e^{-n} \sum_{k=1}^n e^k \\ &\leq e^{-n} \left(\frac{1 - e^{n+1}}{1 - e} - 1 \right) \\ &\leq \frac{e(1 - e^{-n})}{e - 1} \leq \frac{e}{e - 1}\end{aligned}$$