
 Révision.

Exercice 1. À l'aide du changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, on va calculer $\int^x \frac{1}{\sin(t)} dt$

> Faites les bornes

> Calculer dt en fonction de du

> Calculer $\sin(t)$ en fonction de $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

> En déduire $\int^x \frac{1}{\sin(t)} dt$

Exercice 2. [Correction] On considère la fonction $h : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2})$

1. Justifier "rapidement" que la fonction h est continue sur $\mathcal{D} = [-1, 1]$ et dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1, 1[$.
2. Calculer et simplifier h'
3. En déduire une expression simplifiée de $h(x)$

 Pour Vassal, jeudi 7h45

Exercice 3. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer **par récurrence** qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

Calculer a_0, b_0 , et a_1, b_1 .

2. Montrer que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2.

En déduire a_n en fonction de n .

3. Montrer que $\forall n, a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(2 + \sqrt{3})^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

———— Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ ————

Exercice 4. [Correction] Soit le complexe $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}} = \exp\left[i\frac{2\pi}{5}\right]$

On pose $A = \omega + \omega^4$ et $B = \omega^2 + \omega^3$.

1. Placer $\omega, \omega^2, \omega^3$ et ω^4 sur le cercle trigo.
2. D'une part. Montrer que $A = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ et $B = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$.
3. D'autre part.

> Calculer $A + B$ et $A.B$.

> En déduire la valeur de A et de B .

4. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 5. [Correction] Calcul de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

1. Calculer $\cos(x)$ en fonction de e^{ix} et en fonction du couple e^{ix}, e^{-ix} . En déduire que

$$2 \cos \frac{4\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 1 = 0$$

2. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est une racine du polynôme $P(X) = 4X^2 + 2X - 1$.
3. Exprimer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ sous la forme $\sqrt{p + q\sqrt{n}}$.

Exercice 6. [Correction] On considère l'équation : $(1 + iz)^5 = (1 - iz)^5$

1. Résoudre l'équation comme en terminale.
2. Résoudre avec les racines de l'unité
Au final, on trouve les 5 racines $z_k = \tan\left(k\frac{\pi}{5}\right)$ avec $k \in \{0, 1, \dots, 4\}$.
3. Déterminer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Justifier "rapidement" que la fonction h est continue sur $\mathcal{D} = [-1, 1]$ et dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1, 1[$.

On peut calculer le nombre $h(x)$ Ssi $\left\{ \begin{array}{l} x \in [-1, 1] \\ \sqrt{1-x^2} \in [-1, 1] \\ 1-x^2 \geq 0 \end{array} \right.$ $\begin{array}{l} \# \text{ Ainsi } \arcsin(x) \text{ se calcule} \\ \# \text{ Ainsi } \arcsin(\square) \text{ se calcule} \\ \# \text{ Ainsi } \sqrt{\square} \text{ se calcule} \end{array}$

Conclusion : la fonction h est continue sur $\mathcal{D} = [-1, 1]$ et dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1, 1[$.
car la fonction est fabriquée avec les fonctions usuelles.

2. Calculer et simplifier h'

$$\begin{aligned} \text{On a } \forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) &= \frac{d}{dx}[\arcsin'(x)] + \frac{d}{dx}[\arcsin \sqrt{1-x^2}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left[\sqrt{1-x^2} \right]' \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (-2x) \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 - \frac{x}{|x|} \right] \end{aligned}$$

On discute selon le signe de x .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si/Lorsque } x \in \mathcal{D}' \text{ et } x > 0, \text{ alors } |x| = +x \text{ et } f'(x) = 0 \\ \text{Si/Lorsque } x \in \mathcal{D}' \text{ et } x < 0, \text{ alors } |x| = -x \text{ et } f'(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \arcsin'(x) \end{array} \right.$$

3. En déduire une expression simplifiée de $h(x)$

On primitive sans oublier les constantes de primitivation

Pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = 0$ ainsi $f(x) = K$.

> Par continuité cette expression est valise sur $[0, 1]$

> Ainsi $K = h(0) = \frac{\pi}{2}$

Pour tout $x \in]-1, 0[$, $f'(x) = 2 \arcsin'(x)$ ainsi $f(x) = 2 \arcsin(x) + C$.

> Par continuité cette expression est valise sur $[-1, 0]$

> Ainsi $2 \cdot 0 + C = h(0) = \frac{\pi}{2}$

Complément

L'ensemble de dérivabilité $\mathcal{D}'$ a été trouvé avec l'argument sauf aux bornes **et il est faux**

En effet dans le calcul de $h'(x)$, il y a du $\frac{1}{|x|}$ et on ne divise pas par 0!!!!

Pour calculer l'ensemble $\mathcal{D}'$, il faudrait faire

On peut calculer le nombre $h'(x)$ Ssi $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathcal{D} = [-1, 1] \\ \sqrt{1-x^2} \neq \pm 1 \\ 1-x^2 \neq 0 \end{array} \right.$ $\begin{array}{l} \# \text{ Ainsi } h(x) \text{ se calcule} \\ \# \text{ Ainsi } \arcsin(\square) \text{ évite les pb de dérivabilité de } \arcsin \\ \# \text{ Ainsi } \sqrt{\square} \text{ évite les pb de dérivabilité de } \sqrt{} \end{array}$

Conclusion : la fonction h est dérivable sur $\mathcal{D}' =]-1, 0[\cup]0, 1[$.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. On démontre par récurrence

$$H \langle n \rangle : \mid \text{ Il existe deux entiers } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}.$$

Initialisation

On a $(2 + \sqrt{3})^0 = 1$ je choisis $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

Hérédité Je suppose que $H_{<n>}$ est vrai.

$$\text{On veut trouver } a_{n+1} \text{ et } b_{n+1} \text{ entier tel que } (2 + \sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{3}$$

On veut avoir

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 + \sqrt{3})^n (2 + \sqrt{3})$$

On utilise $H \langle n \rangle$

$$= (a_n + b_n \sqrt{3}) (2 + \sqrt{3})$$

$$= [2a_n + 3b_n] + \sqrt{3} [a_n + 2b_n]$$

Je choisis $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ et ce sont bien des entiers qui conviennent !!!

De plus

$$(2 + \sqrt{3})^0 = 1 \implies a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0$$

$$(2 + \sqrt{3})^1 = 2 + \sqrt{3} \implies a_1 = 2 \text{ et } b_1 = 1$$

2. Montrer que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2.

On sait que $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. On va utiliser l'autre relation de récurrence pour calculer b_n est b_{n+1} en fonction des termes de la suite (a_n)

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \Rightarrow b_n = \dots$$

et

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = \dots$$

L'égalité $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ devient (après simplification) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$.

3. En déduire a_n en fonction de n .

> La suite (a_n) est une suite récurrente classique d'ordre 2.

> Équation caractéristique.

On doit résoudre $X^2 - 4X + 1 = 0$.

Après calcul, on trouve que : Les racines sont $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$.

On sait d'après la théorie des suites, qu'il existe 2 scalaires λ et μ tq

$$a_n = \lambda (2 + \sqrt{3})^n + \mu (2 - \sqrt{3})^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

> De plus

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1 \Rightarrow \lambda + \mu = 1 \\ a_1 = 2 \Rightarrow \lambda (2 + \sqrt{3}) + \mu (2 - \sqrt{3}) = 2 \end{array} \right\} \text{ ainsi } \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{2} (2 - \sqrt{3})^n.$$

4. Montrer que $\forall n, a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

On fait par récurrence (1 étage) : $H_{<n>} : (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1$.

En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(2 + \sqrt{3})^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

On en déduit que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$

Or a_n, b_n sont > 0

$$= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{3(b_n)^2}$$

$$\text{Or } (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1$$

$$= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{(a_n)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1} \text{ avec } N_0 = (a_n)^2$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Le complexe $\omega = \exp \left[i \frac{2\pi}{5} \right]$ est la racine *fondamentale* 5-ième de l'unité.

2. Montrer que $A = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ et $B = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$.

$$\text{On a } A = \omega + \frac{1}{\omega} = \dots = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \text{ et } B = \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} = \dots = 2 \cos \left(\frac{4\pi}{5} \right)$$

3. Calculer $A + B$ et $A.B$. En déduire la valeur de A et de B .

$$> \text{ On a } A + B = \omega + \frac{1}{\omega} + \omega^2 + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^3 + \omega + \omega^4 + 1}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } 1 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 &= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0 \\ &= \frac{1 + \omega_1 + \omega_3 + \omega_4}{\omega_2} = \frac{-\omega_2}{\omega_2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } A + B &= \left(\omega + \frac{1}{\omega} \right) \left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2} \right) = \omega^3 + \omega + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^3} \\ &= \frac{\omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1}{\omega^3} \\ &= \frac{\omega^1 + \omega^4 + \omega^2 + 1}{\omega^3} = \frac{-\omega^3}{\omega^3} = -1 \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ AB = -1 \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} B = -1 - A \\ A^2 + A - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } A = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

4. Calculer $\cos \left(\frac{\pi}{5} \right)$, $\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right)$, $\cos \left(\frac{3\pi}{5} \right)$ et $\cos \left(\frac{4\pi}{5} \right)$.

$$\text{Comme } \cos \frac{2\pi}{5} > 0, \text{ on a donc } A = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Montrer que $2 \cos \frac{4\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 1 = 0$

On sait que : $\cos(x) = \Re(e^{ix})$ et $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } 2 \cos \frac{4\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 1 &= \left(e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} \right) + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} \right) + 1 \\ &= \left(e^{i\frac{4\pi}{5}} + \frac{1}{e^{i\frac{4\pi}{5}}} \right) + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{5}}} \right) + 1 \\ &\quad \text{même dénominateur et ré-organisation} \\ &= \frac{1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}}{e^{i\frac{4\pi}{5}}} \\ &= \frac{\text{Somme Géo}}{e^{i\frac{4\pi}{5}}} = \dots = 0 \end{aligned}$$

2. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est une racine du polynôme $P(X) = 4X^2 + 2X - 1$.

On sait que $\cos \frac{4\pi}{5} = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = CC - SS = 2C^2 - 1$

$$\text{Ainsi on a } 2 \cos \frac{4\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 1 = 2(2C^2 - 1) + 2C + 1$$

$$= 4C^2 + 2C - 1$$

Conclusion : $\cos \frac{2\pi}{5}$ est une racine du polynôme $P = P(X) = 4X^2 + 2X - 1$.

3. Exprimer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ sous la forme $\sqrt{p + q\sqrt{n}}$.

> Comme $\Delta = \dots > 0$, le polynôme $P = P(X) = 4X^2 + 2X - 1$ admet deux racines réelles

$$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \text{ et } r' = \frac{-\sqrt{5} - 1}{4}$$

et on remarque : $r > 0$ et $r' < 0$

> On sait que $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$ et que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est une racine du polynôme

Donc $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ la racine positive du polynôme.

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Résoudre l'équation comme en terminale.

On résout l'équation dans $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (E) &\iff 2iz(z^4 - 10z^2 + 5) = 0 = 0 \\ &\iff [z = 0] \text{ ou } [z^4 - 10z^2 + 5 = 0] \end{aligned}$$

On résout $z^4 - 10z^2 + 5 = 0$

$$z^4 - 10z^2 + 5 = 0 \iff \begin{cases} U^2 - 10U + 5 = 0 \\ \text{et } z^2 = U \end{cases} \iff \dots$$

Conclusion : Il y a 5 racines : $0, \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \sqrt{2\sqrt{5} + 5}, -\sqrt{2\sqrt{5} + 5}$

2. Résoudre avec les racines de l'unité.

On a fait souvent ce type de résolution en classe. À faire.

Avec les racines 5-ième, on trouve les 5 racines : $0, \tan \frac{\pi}{5}, \tan \frac{2\pi}{5}, \tan \frac{3\pi}{5}, \tan \frac{4\pi}{5}$

3. Déterminer la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Il faut identifier **Mais qui est qui!!!!** On sait que

$$-\sqrt{2\sqrt{5}+5} < -\sqrt{5-2\sqrt{5}} < 0 < \sqrt{5-2\sqrt{5}} < \sqrt{2\sqrt{5}+5},$$

Avec le graphe de tangente, on a

$$\tan \frac{3\pi}{5} < \tan \frac{4\pi}{5} < 0 < \tan \frac{\pi}{5} < \tan \frac{2\pi}{5}$$

On a donc $\tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan \frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

4. Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Pour trouver le lien entre $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan \frac{\pi}{5}$, on doit être astucieux

On sait que : $C^2 + S^2 = 1$ et $T = S/C$, ainsi $C^2 + T^2.C^2 = 1$ donc $C^2 = \frac{1}{1+T^2}$

$$\text{On a donc } C = \pm \sqrt{\frac{1}{1+T^2}}$$

Ici c'est $\oplus$ car $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$

$$\text{Conclusion : } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = +\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{1}{6-2\sqrt{5}}$$