

## Programme de colle de la semaine 4

du Lundi 06 Octobre au Vendredi 10 Octobre.

### Questions de cours.

- > Trigo et changement de variable. On va calculer  $\int \frac{1}{\cos(t)} dt$  avec le changement  $u = \tan(t/2)$   
Calculer  $dt$  en fonction de  $du$  et vérifier que :  $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$   
Faites le changement de variable et finissez le calcul de l'intégrale avec une décomposition en éléments simples.
- > Un ensemble de définition et une dérivée. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ 
  - > Déterminer  $\mathcal{D}$ , l'ensemble de définition et  $\mathcal{D}'$ , l'ensemble de dérivabilité de la fonction  $f$ .
  - > Calculer et simplifier  $f'$
- > Une inéquation. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)$ 
  - > Déterminer  $\mathcal{D}$ , l'ensemble de définition et  $\mathcal{D}'$ , l'ensemble de dérivabilité de la fonction  $f$ .
  - > Résoudre l'inégalité :  $\frac{x}{1-x} \geq 1$ . En déduire les variations de la fonction  $f$ .  
‡ Pour "résoudre une inégalité", on trouve le signe de  $G - p$  avec FFB et Bô tableau
- > Équation trigo. Résoudre l'équation  $\tan(X) = -1$ . ‡ la réponse N'est PAS :  $\tan(X) = -1 \iff x = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$   
Application : On va déterminer le nombre  $A = \arctan(2) + \arctan(3)$ .  
Calculer  $\tan(a+b)$ . En déduire que  $A$  est une solution de l'équation  $\tan(X) = -1$   
Justifier que :  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \leq A = \arctan(2) + \arctan(3) \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ . En déduire la valeur de  $A = \frac{3\pi}{2}$ .
- > Autour du nombre  $j$ .  
Définition et propriétés du nombre  $j$ .  
Factoriser les polynômes  $X^3 - 1$  et  $X^3 + 1$ .
- > Racines n-ième de l'unité.  
Définition et propriétés des racines n-ième de l'unité.  
Factoriser les polynômes  $X^n - 1$  et  $X^n - a^n$ .  
**Bonus** démonstration de : Les solutions de l'équation  $X^n = 1$  sont les racines n-ième de l'unité.
- > Une équation de degré 5. On considère l'équation :  $(1+iz)^5 - (1-iz)^5 = 0$   
Avec le binôme, justifier que l'équation est polynomiale de degré 5  
Avec les racines de l'unité, justifier que les racines/solutions sont  $z_k = \tan\left(k\frac{\pi}{5}\right)$  avec  $k \in \{0, 1, \dots, 4\}$ .

### Exercices.

Résolution d'équation et manipulation des racines  $n - i\grave{e}me$ .