

Pour démontrer une inégalité, il y a les méthodes "premiers pas" et "le second temps de la valse"

les méthodes "premiers pas" *il y a pleins de possibilités*

- > Valeurs Absolues
- > Somme et/ou intégrale
- > Convexité
- > Transfert
- > W, G-p, récurrence-fonction

"le second temps de la valse". *il y a deux possibilités*

- > Je chemine jusqu'à ... et on utilise l'inégalité
- > J'applique l'inégalité précédente avec $x = \dots \in \mathcal{D}_{omaine}$, ainsi on a ...

Application : Dans l'exercice suivant, les questions Q1b, Q1c, Q1e, Q2d, Q2e se font avec le "le second temps de la valse" et j'applique.

Exercice 1. L'objectif de ce problème est de démontrer, de deux manière différentes, l'inégalité Nesbitt :

$$\forall u, v, w > 0, \frac{u}{v+w} + \frac{v}{u+w} + \frac{w}{u+v} \geq \frac{3}{2}$$

Dans toute la suite, on considère fixés u, v, w trois réels strictement positifs.

1. Démonstration via Inégalité arithmético-harmonique : Soit $a, b, c > 0$. On note

$$\begin{aligned} &> M(a, b, c) = \frac{a+b+c}{3}, \text{ leur moyenne arithmétique} \\ &> H(a, b, c) = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}, \text{ leur moyenne harmonique.} \end{aligned}$$

- (a) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, 2xy \leq x^2 + y^2$.
- (b) En déduire : $\forall a, b, c > 0, 2abc \leq a^2b + bc^2$.
- (c) En déduire que : $\forall a, b, c > 0, 9abc \leq (a+b+c)(ab+bc+ac)$.
- (d) Simplifier (CàD FFB) $H(a, b, c)$
et déduire des questions précédentes l'inégalité arithmético-harmonique, CàD $H(a, b, c) \leq M(a, b, c)$.
- (e) En appliquant l'inégalité arithmético-harmonique à $u+v, u+w$ et $v+w$, montrer l'inégalité de Nesbitt.

2. Démonstration via Inégalité arithmético-géométrique : Soit $a, b, c > 0$. On note

$$\begin{aligned} &> M(a, b, c) = \frac{a+b+c}{3}, \text{ leur moyenne arithmétique} \\ &> G(a, b, c) = \sqrt[3]{abc}, \text{ leur moyenne géométrique.} \end{aligned}$$

- (a) Montrer que : $\forall y \in [0; 1], y(1-y)^2 \leq \frac{4}{27}$.
- (b) Soit $y \in]0; 1[$. Déterminer le maximum de la fonction f_y définie sur $[0; 1-y]$ par :

$$\forall x \in [0; 1-y], f_y(x) = -yx^2 + y(1-y)x$$

- (c) En déduire que, si x, y, z sont trois réels strictement positifs tels que $x+y+z=1$, alors : $xyz \leq \frac{1}{27}$.
- (d) En appliquant l'inégalité précédente à $x = \frac{a}{a+b+c}, y = \frac{b}{a+b+c}$ et $z = \frac{c}{a+b+c}$,
montrer l'inégalité arithmético-géométrique CàD $G(a, b, c) \leq M(a, b, c)$.
- (e) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique deux fois à des nombres bien choisis (*difficile*), montrer que :

$$((u+v) + (v+w) + (u+w)) \left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{v+w} + \frac{1}{u+w} \right) \geq 9$$

et en déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Nesbitt.

Exercice 2. [Correction] On considère la suite de Fibonacci, notée (F_n) définie par :

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 5$, $F_n \geq n$.

En déduire la limite de la suite (F_n)

2. Montrer, à l'aide d'une récurrence simple, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

Remarque : l'hérédité n'est pas si facile que ça.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A = \arctan\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$ et $B = \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$

- (a) Calculer : $\tan(A)$ et $\tan(B)$. En déduire que $\tan(A) = \tan(B)$

Peut-on en conclure que $A = B$?

- (b) Justifier que : A et B appartiennent à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Peut-on maintenant conclure que $A = B$?

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, \arctan\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$

5. En déduire que : $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \frac{\pi}{2}$

1. Récurrence double plutôt facile.
2. Récurrence simple plutôt délicate
3. Calculer : $\tan(A)$ et $\tan(B)$. En déduire que $\tan(A) = \tan(B)$

On a

$$> \tan(A) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right) = \frac{1}{F_{2n}} \text{ car } \arctan(\alpha) \text{ est une sol de l'eq } \tan(X) = \alpha$$

$$> \text{Et } \tan(B) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) = \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}} \frac{1}{F_{2n+2}}} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \tan(A) - \tan(B) &= \frac{1}{F_{2n}} - \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1} \\ &= \frac{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1 - F_{2n}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1 - F_{2n}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+2}} \\ &= \frac{F_{2n+1}(F_{2n+1} + F_{2n}) - 1 - F_{2n}F_{2n+1} - [-1 + F_{2n+1}^2]}{\dots} = 0 \end{aligned}$$

Peut-on en conclure que $A = B$?

NON, $\tan(A) = \tan(B) \not\Rightarrow A = B$. Par exemple $\tan(0) = \tan(\pi) = 0$ et $0 \neq \pi$

4. Justifier que : A et B appartiennent à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

On sait que $\arctan$ est croissante et $\underbrace{\arctan(0)}_{=0} \leq \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} \leq \frac{\pi}{2}$, ainsi

$$> \text{On a } 0 \leq \frac{1}{F_{2n}} \text{ donc } 0 \leq \arctan\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Conclusion : } 0 < A = \arctan\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$> \text{On a } 0 \leq \frac{1}{F_{2n+2}} \leq \frac{1}{F_{2n+1}} < 1 \text{ donc } 0 \leq \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \leq \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Conclusion : } 0 < B = \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Peut-on maintenant conclure que $A = B$?

OUI!!! Comme $\tan(A) = \tan(B)$ et $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, on a bien $A = B$

5. Télescopage ou récurrence.

6. Comme $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$, on a : $\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$