Pour démontrer une inégalité, il y a les méthodes "premiers pas" et "le second temps de la valse"

les méthodes "premiers pas" *il y a pleins de possibilités*

> $>$ Valeurs Absolues
> $>$ Somme et/ou intégrale
> $>$ Convexité
> $>$ Transfert
> $>$ W, G-p, récurrence-fonction

"le second temps de la valse". *il y a deux possibilités*

> $>$ Je chemine jusqu'à ... et on utilise l'inégalité .....
> $>$ J'applique l'inégalité précédente avec $x = \cdots \in \mathscr{D}_{omaine}$, ainsi on a ...

Application : Dans l'exercice suivant, les questions Q1b, Q1c, Q1e, Q2d, Q2e
se font avec le "le second temps de la valse" et j'applique.

**Exercice 1.** [Correction] L'objectif de ce problème est de démontrer, de deux manière différentes, l'inégalité Nesbitt :

$$\forall\, u, v, w > 0,\ \frac{u}{v+w} + \frac{v}{u+w} + \frac{w}{u+v} \geqslant \frac{3}{2}$$

Dans toute la suite, on considère fixés $u, v, w$ trois réels strictement positifs.

1. Démonstration via Inégalité arithmético-harmonique : Soit $a, b, c > 0$. On note
   > $> M(a,b,c) = \dfrac{a+b+c}{3}$, leur moyenne arithmétique
   > $> H(a,b,c) = \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, leur moyenne harmonique.

   (a) Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ 2xy \leqslant x^2 + y^2$.

   (b) En déduire : $\forall\, a, b, c > 0,\ 2abc \leqslant a^2 b + bc^2$.

   (c) En déduire que : $\forall\, a, b, c > 0,\ 9abc \leqslant (a+b+c)(ab+bc+ac)$.

   (d) Simplifier (CàD FFB) $H(a,b,c)$
   et déduire des questions précédentes l'inégalité arithmético-harmonique, CàD $H(a,b,c) \leqslant M(a,b,c)$.

   (e) En appliquant l'inégalité arithmético-harmonique à $u+v, u+w$ et $v+w$, montrer l'inégalité de Nesbitt.

2. Démonstration via Inégalité arithmético-géométrique : Soit $a, b, c > 0$. On note
   > $> M(a,b,c) = \dfrac{a+b+c}{3}$, leur moyenne arithmétique
   > $> G(a,b,c) = \sqrt[3]{abc}$, leur moyenne géométrique.

   (a) Montrer que : $\forall y \in [0;1],\ y(1-y)^2 \leqslant \dfrac{4}{27}$.

   (b) Soit $y \in ]0;1[$. Déterminer le maximum de la fonction $f_y$ définie sur $[0; 1-y]$ par :
   $$\forall x \in [0; 1-y], f_y(x) = -yx^2 + y(1-y)x$$

   (c) En déduire que, si $x, y, z$ sont trois réels strictement positifs tels que $x+y+z=1$, alors : $xyz \leqslant \dfrac{1}{27}$.

   (d) En appliquant l'inégalité précédente à $x = \dfrac{a}{a+b+c}, y = \dfrac{b}{a+b+c}$ et $z = \dfrac{c}{a+b+c}$,
   montrer l'inégalité arithmético-géométrique CàD $G(a,b,c) \leqslant M(a,b,c)$.

   (e) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique deux fois à des nombres bien choisis *(difficile)*, montrer que :
   $$((u+v)+(v+w)+(u+w))\left(\frac{1}{u+v}+\frac{1}{v+w}+\frac{1}{u+w}\right) \geqslant 9$$
   et en déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Nesbitt.

**Exercice 2.** [Correction] On considère la suite de Fibonacci, notée $(F_n)$ définie par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1\ et\ \forall n \geqslant 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 5,\ \ F_n \geqslant n.$

   En déduire la limite de la suite $(F_n)$

2. Montrer, à l'aide d'une récurrence simple, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n\, F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

   *Remarque : l'hérédité n'est pas si facile que ça.*

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right)$ et $B = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right)$

   (a) Calculer : $\tan(A)$ et $\tan(B)$. En déduire que $\tan(A) = \tan(B)$

   Peut-on en conclure que $A = B$ ?

   (b) Justifier que : $A$ et $B$ appartiennent à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

   Peut-on maintenant conclure que $A = B$ ?

   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right)$

4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$

5. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \frac{\pi}{2}$

**Solution de l'exercice 1** **(Énoncé)**

1. Démonstration via Inégalité arithmético-harmonique : Soit $a, b, c > 0$. On note

   $> M(a,b,c) = \dfrac{a+b+c}{3}$, leur moyenne arithmétique

   $> H(a,b,c) = \dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, leur moyenne harmonique.

   (a) Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ 2xy \leqslant x^2 + y^2$.

   Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $G - p = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geqslant 0$

   Conclusion : L'inégalité est vraie

   (b) En déduire : $\forall\, a, b, c > 0,\ 2abc \leqslant a^2b + bc^2$.

   Pour tout $a, b, c > 0$, j'applique l'inégalité précédente avec $x = a.\sqrt{b}$ et $y = c\sqrt{b}$

   Ainsi on a : $\underbrace{2.a.\sqrt{b}.c.\sqrt{b}}_{=2abc} \leqslant \underbrace{\left(a.\sqrt{b}\right)^2 + \left(c.\sqrt{b}\right)^2}_{=a^2+b+bc^2}$.

   Conclusion : L'inégalité est vraie

   (c) En déduire que : $\forall\, a, b, c > 0,\ 9abc \leqslant (a+b+c)(ab+bc+ac)$.

   Pour tout $a, b, c > 0$, on a : $(a+b+c)(ab+bc+ac) = 3abc + a^2b + ba^2 + b^2c + cb^2 + b^2a + ac^2$

   Je développe car dans les questions précédentes, c'est plutôt développé

   On vient de démontrer question précédente Q1b que : Pour tout $\square, \heartsuit, \bigcirc > 0$, on a $2\square\heartsuit\bigcirc \leqslant \square^2\heartsuit + \heartsuit\bigcirc^2$,

   ainsi $2abc \leqslant a^2b + bc^2$

   et aussi $2abc \leqslant b^2c + ca^2$

   et encore $2abc \leqslant c^2a + ab^2$

   Conclusion : $(a+b+c)(ab+bc+ac) = 3abc + \underbrace{a^2b + bc^2}_{\geqslant 2abc} + \underbrace{b^2c + cb^2}_{\geqslant 2abc} + \underbrace{b^2a + ac^2}_{\geqslant 2abc} \geqslant 9abc$

   (d) Simplifier (CàD FFB) $H(a,b,c)$

   On a : 
   $$H(a,b,c) = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3}{\frac{ab+bc+cz}{abc}} = \frac{3abc}{ab+bc+cz}$$

   En déduire des questions précédentes l'inégalité arithmético-harmonique, CàD $H(a,b,c) \leqslant M(a,b,c)$.

   On a : 
   $$G - p = M(a,b,c) - H(a,b,c) = \frac{a+b+c}{3} - \frac{3abc}{ab+bc+cz} = \frac{(a+b+c)(ab+bc+cz) - 9abc}{ab+bc+cz} \geqslant 0 \text{ voir inégalité précédente}$$

   (e) En appliquant l'inégalité arithmético-harmonique à $u+v, u+w$ et $v+w$, montrer l'inégalité de Nesbitt.

   Pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}$, j'applique l'inégalité arithmético-harmonique avec $u+v > 0$, $u+w > 0$ et $v+w > 0$,

   ainsi on a : $\dfrac{3}{\frac{1}{u+v}+\frac{1}{v+w}+\frac{1}{w+u}} \leqslant \dfrac{(u+v)+(v+w)+(w+u)}{3} = \dfrac{2}{3}(u+v+w)$

   On ré-organise, ainsi $\dfrac{9}{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{u+v} + \dfrac{1}{v+w} + \dfrac{1}{w+u}\right)(u+v+w)$

   On développe à droite, ainsi :
   $$\left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{v+w} + \frac{1}{w+u}\right)(u+v+w) = 1 + \frac{w}{u+v} + 1 + \frac{u}{v+w} + 1 + \frac{u}{w+v}$$

   Conclusion : $\dfrac{w}{u+v} + \dfrac{u}{v+w} + \dfrac{u}{w+v} \geqslant \dfrac{9}{2} - 3 = \dfrac{3}{2}$

2. Démonstration via Inégalité arithmético-géométrique : Soit $a, b, c > 0$. On note

   $> M(a,b,c) = \dfrac{a+b+c}{3}$, leur moyenne arithmétique

   $> G(a,b,c) = \sqrt[3]{abc}$, leur moyenne géométrique.

   (a) Montrer que : $\forall y \in [0;1],\ y(1-y)^2 \leqslant \dfrac{4}{27}$.

   On étudie la fonction $h : y \longmapsto y(1-y)^2$

$>$ La fonction $h$ est dérivable sur $\mathscr{D} = [0;1]$

$$> \forall\, y \in \mathscr{D},\ f'(y) = \frac{d}{dy}\left[y(1-y)^2\right] = 1.(1-y)^2 + y.(-1)2(1-y)$$
$$= (1-y)\left[(1-y) - 2y\right]$$
$$= (1-y)(1-3y)$$

$>$ D'où le bô tableau

| $x$ | $0$ | | $^1/_3$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-y$ | | $+$ | | $+$ | |
| $1-3y$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| sgn $h'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h$ | 0 | $\nearrow$ | $h(^1/_3\,) = {}^4/_{27}$ | $\searrow$ | 0 |

Conclusion : $\forall y \in [0;1],\ 0 \leqslant y(1-y)^2 \leqslant \dfrac{4}{27}$

(b) Soit $y \in ]0;1[$. Déterminer le maximum de la fonction $f_y$

On étudie la fonction $f_y$

$>$ La fonction $f_y$ est dérivable sur $\mathscr{D} = [0;1-y]$

$$> \forall\, y \in \mathscr{D},\ f_y'(x) = \frac{d}{dx}\left[-yx^2 + y(1-y)x\right] = y(-2x) + y(1-y) = y\left[-2x + (1-y)\right]$$

$>$ D'où le bô tableau

| $y$ | $0$ | | $\frac{1-y}{2}$ | | $1-y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+(1-y)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| sgn $f_y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_y$ | 0 | $\nearrow$ | $f_y\left(\frac{1-y}{2}\right)$ | $\searrow$ | 0 |

De plus $f_y\left(\dfrac{1-y}{2}\right) = -y\left(\dfrac{1-y}{2}\right)^2 + y(1-y)\left(\dfrac{1-y}{2}\right)$
$$= -\frac{y(1-y)^2}{4} + \frac{y(1-y)^2}{2}$$
$$= \frac{y(1-y)^2}{4}$$

Conclusion : Le maximum de la fonction $f_y$ sur $[0, 1-y]$ est égale à $\dfrac{y(1-y)^2}{4}$

(c) En déduire que, si $x, y, z$ sont trois réels strictement positifs tels que $x+y+z=1$, alors : $xyz \leqslant \dfrac{1}{27}$.

Pour tout $x, y, z$ sont trois réels strictement positifs tels que $x+y+z=1$, on a

$$\begin{aligned} xyz &= xy(1-x-y) \qquad \text{car } x+y+z=1 \\ &= -y\,x^2 + xy(1-y) \\ &= f_y(x) \end{aligned}$$

De plus $x \in [0, 1-y]$ car $x > 0$ et $x = 1-y-z \leqslant 1-y$

$$\text{Conclusion : } xyz = f_y(x) \leqslant \underbrace{\frac{y(1-y)^2}{4}}_{\text{le max de } f_y} \leqslant \frac{1}{4}\ \underbrace{\frac{4}{27}}_{\text{D'après Q2a}} = \frac{1}{27}$$

(d) En appliquant l'inégalité précédente à $x = \dfrac{a}{a+b+c}, y = \dfrac{b}{a+b+c}$ et $z = \dfrac{c}{a+b+c}$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique CàD $G(a,b,c) \leqslant M(a,b,c)$.

Les nombres $x = \dfrac{a}{a+b+c}$, $y = \dfrac{b}{a+b+c}$ et $z = \dfrac{c}{a+b+c}$ sont $> 0$ vérifie $x+y+z=1$,

Ainsi on sait que $x.y.z \leqslant \dfrac{1}{27}$.

On transcrit et on ré-organise

$$\begin{aligned}
x.y.z &\leqslant \frac{4}{27} \\
&\iff \frac{a}{a+b+c}.\frac{b}{a+b+c}.\frac{c}{a+b+c} \leqslant \frac{1}{27} \\
&\iff \frac{abc}{(a+b+c)^3} \leqslant \frac{1}{27} \\
&\iff a.b.c \leqslant \frac{(a+b+c)^3}{27} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \\
&\implies \underbrace{\sqrt[3]{abc}}_{G(a,b,c)} = (abc)^{1/3} \leqslant \underbrace{\frac{a+b+c}{3}}_{M(a,b,c)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $G(a,b,c) \leqslant M(a,b,c)$

(e) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique deux fois à des nombres bien choisis *(difficile)*, montrer que : $\Big((u+v)+(v+w)+(u+w)\Big)\left(\dfrac{1}{u+v}+\dfrac{1}{v+w}+\dfrac{1}{u+w}\right) \geqslant 9$

$>$ D'une part : on applique l'inégalité arithmético-géométrique avec $a = u+v$, $b = v+w$ et $c = w+u$

ainsi $(u+v).(v+w).(w+u) \leqslant \dfrac{(u+v)+(v+w)+(u+w)}{3}$

$>$ D'une part : on applique l'inégalité arithmético-géométrique avec $a = \dfrac{1}{u+v}$, $b = \dfrac{1}{v+w}$ et $c = \dfrac{1}{w+u}$

ainsi $\dfrac{1}{u+v}.\dfrac{1}{v+w}.\dfrac{1}{w+u} \leqslant \dfrac{\frac{1}{u+v}+\frac{1}{v+w}+\frac{1}{u+w}}{3}$

On multiplie les deux inégalités, ainsi on a bien

$$1 \leqslant \frac{(u+v)+(v+w)+(u+w)}{3}.\frac{\frac{1}{u+v}+\frac{1}{v+w}+\frac{1}{u+w}}{3}$$

Conclusion : On a bien $\Big((u+v)+(v+w)+(u+w)\Big)\left(\dfrac{1}{u+v}+\dfrac{1}{v+w}+\dfrac{1}{u+w}\right) \geqslant 9$

En déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Nesbitt.

On développe et ré-organise $\Big((u+v)+(v+w)+(u+w)\Big)\left(\dfrac{1}{u+v}+\dfrac{1}{v+w}+\dfrac{1}{u+w}\right)$

*En effet :* $\Big((u+v)+(v+w)+(u+w)\Big)\left(\dfrac{1}{u+v}+\dfrac{1}{v+w}+\dfrac{1}{u+w}\right)$
$= 6 + 2\left(\dfrac{u}{v+w}+\dfrac{v}{u+w}+\dfrac{w}{u+v}\right)$

Conclusion : $6 + 2\left(\dfrac{u}{v+w}+\dfrac{v}{u+w}+\dfrac{w}{u+v}\right) \geqslant 9$ Yes ! ! !

**Solution de l'exercice 2 (Énoncé)**

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 5,\ F_n \geqslant n$

   On fait par récurrence (2 étages) $H_{<n>} : F_n \geqslant n$

   Initialisation avec $n = 5$ et $n = 6$

   On a $F_5 = 5$ et $F_6 = 8$ donc $H_{<5>}$ et $H_{<6>}$ sont vraies

   Hérédité. On suppose $H_{<n>}$ et $H_{<n+1>}$

   $\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+2>}}$

   On a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

   *On applique* $H_{<n>}$ *et* $H_{<n+1>}$

   $\geqslant (n+1) + (n) = 2n + 1$

   De plus $Inter - Final = 2n + 1 - (n+2) = n - 1 \geqslant 0$ car $n \geqslant 5$

   Conclusion : $H_{<n+2>}$ sont vraie. Yes

   En déduire la limite de la suite $(F_n)$

   Comme $\forall\, n \geqslant 5$, on a $F_n \geqslant n$ et $n \to \infty$, on a (thm de comparaison) $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

2. Montrer, à l'aide d'une récurrence simple, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_n\, F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

   On fait par récurrence $H_{<n>} : F_n\, F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

   Initialisation avec $n = 0$

   On a $F_0\, F_2 - F_1^2 = 0.1 - (1)^2 = 1$ et $(-1)^{1+1} = 1$ donc $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité. On suppose $H_{<n>}$

   $\boxed{\text{On va montrer } H_{<n+1>}\text{, CàD } F_{n+1}\, F_{n+3} - F_{n+2}^2 = (-1)^{n+2}}$

   $$\begin{aligned}
   \text{On a : } F_{n+1}\, F_{n+3} - F_{n+2}^2 &= F_{n+1}\, [F_{n+2} + F_{n+1}] - F_{n+2}^2 \\
   &= F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}^2 \\
   &= F_{n+1}^2 + F_{n+2}\left[F_{n+1} - F_{n+2}\right] \\
   &= F_{n+1}^2 + F_{n+2}\left[-F_n\right] \qquad \textit{car } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\
   &= -\left[F_n\, F_{n+2} - F_{n+1}^2\right] \\
   &= -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}
   \end{aligned}$$

   Conclusion : $H_{<n+1>}$ sont vraie. Yes

3. Calculer : $\tan(A)$ et $\tan(B)$. En déduire que $\tan(A) = \tan(B)$

   On a

   $> \tan(A) = \tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right)\right) = \dfrac{1}{F_{2n}}$ car $\arctan(\alpha)$ est une sol de l'eq $\tan(X) = \alpha$

   $$> \text{Et } \tan(B) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right)$$
   $$= \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}}\frac{1}{F_{2n+2}}} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1}$$

   $$\begin{aligned}
   \textit{Ainsi } \tan(A) - \tan(B) &= \frac{1}{F_{2n}} - \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1} \\
   &= \frac{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1 - F_{2n}F_{2n+1} - F_{2n}F_{2n+2}}{\ldots\ldots} \\
   &= \frac{F_{2n+1}\,(F_{2n+1} + F_{2n}) - 1 - F_{2n}F_{2n+1} - \left[-1 + F_{2n+1}^2\right]}{\ldots\ldots} = 0
   \end{aligned}$$

   Peut-on en conclure que $A = B$ ?

   NON, $\tan(A) = \tan(B) \not\Rightarrow A = B$. Par exemple $\tan(0) = \tan(\pi) = 0$ et $0 \neq \pi$

4. Justifier que : $A$ et $B$ appartiennent à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

   On sait que arctan est croissante et $\underbrace{\arctan(0)}_{=0} \leqslant \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, ainsi

> On a $0 \leqslant \dfrac{1}{F_{2n}}$ donc $0 \leqslant \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right) < \dfrac{\pi}{2}$

Conclusion : $0 < A = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right) < \dfrac{\pi}{2}$

> On a $0 \leqslant \dfrac{1}{F_{2n+2}} \leqslant \dfrac{1}{F_{2n+1}} < 1$ donc $0 \leqslant \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right) \leqslant \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) < \dfrac{\pi}{4}$

Conclusion : $0 < B = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) < \dfrac{\pi}{2}$

Peut-on maintenant conclure que $A = B$ ?

OUI ! ! ! Comme $\tan(A) = \tan(B)$ et $0 < A, B < \dfrac{\pi}{2}$, on a bien $A = B$

5. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$

On va télescoper en utilisant $\arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right)$

Attention cette "transformation" n'est pas valide pour $k = 0$

Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) &= \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{F_1}\right)}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)} \\
&= \arctan\left(\frac{1}{F_1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \\
&= 2\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \qquad \text{car } \arctan(1) = {}^{\pi}/_{4}
\end{aligned}$$

6. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \frac{\pi}{2}$

Comme $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) = \arctan(0) = 0$ et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$