

Le TD.

**Exercice 1.** [Correction] Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère le polynôme  $P(X) = (X + 1)^n - 1$ .

- Justifier que  $P$  est un polynôme et déterminer son degré et coefficient dominant.

Calculer coefficient de  $X^1$

- Vérifier que  $z_0 = 0$  est une racine de  $P$ . On note  $z_1, \dots, z_{n-1}$  les autres racines de  $P$ .
- Déterminer les racines de  $P$  et factoriser  $P$ .
- En considérant le coefficient de  $X^1$ , montrer que :  $z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1} n$
- Calculer  $z_1 \cdots z_{n-1}$  en utilisant l'expression des racines trouvées à la question Q3.
- En déduire que :  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$ .

**Exercice 2.** [Correction] On considère l'équation différentielle (E) :  $|x| y' + (x - 1)y = x^3$

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>On se place sur <math>] -\infty, 0[</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>Écrire l'équation normalisée que l'on doit résoudre</li> <li>Vérifier que <math>\left[ x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} \right]</math> est une solution particulière de (E) sur <math>\mathbb{R}_+^*</math>.</li> <li>Résoudre, sur <math>\mathbb{R}_+^*</math>, l'équation homogène.</li> <li>Donner, sur <math>\mathbb{R}_+^*</math>, les solutions de l'équation complète.</li> </ol> </li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>On se place sur <math>]0, +\infty[</math> <ol style="list-style-type: none"> <li>Écrire l'équation normalisée que l'on doit résoudre</li> <li>Chercher, sur <math>\mathbb{R}_+^*</math>, une solution particulière de (E) polynomiale de degré 2.</li> <li>Résoudre, sur <math>\mathbb{R}_+^*</math>, l'équation homogène.</li> <li>Donner, sur <math>\mathbb{R}_+^*</math>, les solutions de l'équation complète.</li> </ol> </li> </ol> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- Bonus** Peut-on raccorder les solutions en 0 ?

**Exercice 3.** [Correction] On considère sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle (E) .

$$y' + y - y^2 = 0 \quad (E)$$

On suppose que la fonction  $y$  est une solution de (E) et on suppose que la fonction  $y$  ne s'annule pas.

On considère sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $z$  par la formule  $z(x) = \frac{1}{y(x)}$

- Déterminer une EDL1 ( $E'$ ) vérifiée par la fonction  $z$ .
- Déterminer  $z(x)$  puis  $y(x)$ .

**Exercice 4.** [Correction] Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue deux fois dérivables vérifiant l'équation différentielle

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } f(1) = 1$$

- Montrer que : pour tout  $t > 0$ ,  $t^2 f''(t) + f(t) = 0$ .
- On considère la fonction  $g$  définie par  $g(u) = f(e^u)$ .
  - Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de  $g$  et montrer que  $g$  est solution de l'équation différentielle  $g'' - g' + g = 0$ .
  - Déterminer  $g$ .
- Déterminer  $f$ .

———— Bonus sur les complexes ————

**Exercice 5.** [Correction] Soit  $\omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{11}\right)$  donc  $\omega$  est la racine 11-ième fondamentale de l'unité.

On considère les complexes

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \quad \text{Et} \quad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. Autour de  $\omega$

> Calculer  $\omega^{11}$ . Placer dans le plan complexe, les complexes :  $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{10}$ .

> En déduire que :  $\overline{S} = T$  et  $\text{Im}S > 0$

2. Somme/produit.

(a) Calculer  $S + T$  et vérifier que :  $S.T = 3$  Le calcul de  $S.T$  est un peu lourd. Admettre ?

(b) En déduire la valeur de  $S$  et de  $T$ .

3. Calculs intermédiaires.

(a) Montrer que :  $\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = -i \tan\left(\frac{3\pi}{11}\right)$

(b) Montrer que :  $\omega - \omega^{10} = 2i \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

4. En utilisant Q4a. et Q4b., exprimer  $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$  en fonction de  $T$  et  $S$ , puis vérifier que

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11}$$

———— Un exo important pour Jeudi ————

**Exercice 6.** [Correction] Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathcal{D} = \mathbb{R}$  et vérifiant la relation

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(y)f(x) \quad (E)$$

1. Calculer les valeurs possibles de  $f(0)$ .

2. On suppose que :  $f(0) = 0$

Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ .

3. On suppose que  $f(0) = 1$

(a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

(b) Démontrer qu'il existe  $\alpha$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) - \alpha f(t) = 0$

(c) Déterminer  $f$ , c-à-d calculer  $f(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

(d) Trouver parmi les solutions de l'équation différentielle, les fonctions  $f$  qui sont solutions du problème.

4. **Facultatif** On suppose que  $f$  est seulement continue sur  $\mathbb{R}$  et vérifie la relation (E)

Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle admet des primitives. On note  $H$  l'une d'elle.

En primitivation E, montrer que la fonction  $f$  est dérivable.

### Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

- Justifier que  $P$  est un polynôme et déterminer son degré et coefficient dominant.

On a  $P(X) = (X + 1)^n - 1$

$$= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right) - 1 \quad \text{Donc } P \text{ est bien un polynôme}$$

$$= \left( \underbrace{1 X^n}_{k=n} + \dots + \underbrace{\binom{n}{1} X^1 + 1}_{k=1} \right) - 1$$

Conclusion :  $P$  est un polynôme de degré  $n$  et son coefficient dominant est égale à 1.

Calculer coefficient de  $X^1$

Le coefficient de  $X^1$  est égale à  $n$ .

- Vérifier que  $z_0 = 0$  est une racine de  $P$ .

Comme  $P(0) = (0 + 1)^n - 1 = 1 - 1 = 0$ , donc  $z_0 = 0$  est une racine de  $P$ .

- Déterminer les racines de  $P$  et factoriser  $P$ .

On a  $(X + 1)^n = 1 \iff \begin{cases} U^n = 1 \\ X + 1 = U \end{cases}$

> Les racines/solutions de l'équation  $U^n = 1$  sont  $U = U_k = \omega_k = \exp\left(i k \frac{2\pi}{n}\right)$  avec  $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

> Ainsi on trouve  $n$  racines/solutions  $X = z_k = -1 + U_k = -1 + \exp\left(i k \frac{2\pi}{n}\right)$  avec  $k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$

Avec l'argument moitié, on obtient

$$z_k = \left[ 2i \sin\left(k \frac{\pi}{n}\right) \right] \exp\left(i k \frac{\pi}{n}\right) \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$$

> Ainsi on obtient la factorisation

$$\begin{aligned} \text{Ainsi on a } P(X) &= (X + 1)^n - 1 = \\ &= 1(X - \underbrace{z_0}_{=0})(X - z_1) \cdots (X - z_{n-1}) \\ &= 1X(X - z_1) \cdots (X - z_{n-1}) \end{aligned}$$

- En considérant le coefficient de  $X^1$ , montrer que :  $z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1} n$

> D'une part. À la question Q1, on a trouvé que le coefficient de  $X^1$  est égale à  $n$ .

> D'autre part. Avec la forme factoriser  $P(X) = X(X - z_1) \cdots (X - z_{n-1})$ , on trouve que le coefficient de  $X^1$  est égale à  $(-z_1)(-z_2) \cdots (-z_{n-1}) = (-1)^{n-1} z_1 \cdots z_{n-1}$ .

Conclusion :  $n = (-1)^{n-1} z_1 \cdots z_{n-1}$  et on a bien  $z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1} n$

- Calculer  $z_1 \cdots z_{n-1}$  en utilisant l'expression des racines trouvées à la question Q3.

On a avec Q1

$$\begin{aligned} z_1 \cdots z_{n-1} &= \prod_{k=1}^{n-1} \left[ 2i \sin\left(k \frac{\pi}{n}\right) \right] \exp\left(i k \frac{\pi}{n}\right) \\ &= \underbrace{\quad}_{k=1} \underbrace{\quad}_{k=2} \cdots \underbrace{\quad}_{k=n-1} \\ &= (\text{Plein de } 2) (\text{Plein de } i) (\text{Plein de } e^{ik\pi/n}) \left( \text{Plein de } \sin\left(k \frac{\pi}{n}\right) \right) \\ &= 2^{n-1} (i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(k \frac{\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

De plus  $\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \exp\left(i \frac{(n-1)\pi}{2}\right) = i^{n-1}$

Conclusion :  $z_1 \cdots z_{n-1} = 2^{n-1} (i)^{n-1} (i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(k \frac{\pi}{n}\right)$

$$= (-1)^{n-1} 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(k \frac{\pi}{n}\right) \quad \text{car } (i)^{n-1} (i)^{n-1} = (i^2)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

6. En déduire que :  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$ .

On a maintenant :  $z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1}n$  et  $z_1 \cdots z_{n-1} = (-1)^{n-1}2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(k \frac{\pi}{n}\right)$

Conclusion :  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$ .

## Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. On doit résoudre sur  $] -\infty, 0[$ , l'équation différentielle :  $-x y' + (x-1)y = x^3$

> C'est une EDL1 complète.

> A faire (Facile) : la fonction  $f : x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}$  est une solution particulière sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation complète.

> Après calcul, on trouve que  $\forall x < 0$ ,  $h(x) = k \frac{e^x}{x}$

$$\text{Conclusion : } \forall x < 0, y(x) = y_0(x) + h(x) = \left(x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x}\right) + k \frac{e^x}{x}$$

2. On doit résoudre sur  $]0, +\infty[$ , l'équation différentielle :  $x y' + (x-1)y = x^3$

> C'est une EDL1 complète.

> Sol Part. On cherche une fonction  $y_0$  vérifiant  $x y_0' + (x-1)y_0 = x^3 \forall x > 0$ ,  $y_0(x) = a x^2 + b x + c$   
après calculs, je trouve/choisis  $y_0(x) = x^2 - x$

> Après calcul, on trouve que  $\forall x > 0$ ,  $h(x) = m x e^{-x}$

$$\text{Conclusion : } \forall x > 0, y(x) = y_0(x) + h(x) = (x^2 - x) + m x e^{-x}$$

3. La solution  $y$  se prolonge en 0 Ssi les limites à Gauche et à Droite existent et coïncident

> A Droite.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x + m x e^{-x}) = 0$ .

> A Gauche.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + k \frac{e^x}{x}\right) = C'est une FI$

On fait une approximation linéaire ainsi

$$x^2 + 3x + 6 + \frac{6}{x} + k \frac{e^x}{x} = \frac{6+k}{x} + (6+k) + o(1)$$

Situation :  $k \neq -6$

On a alors  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \infty$

Dans cette situation la limite à gauche n'existe pas et donc il ne peut y avoir de prolongement.

Situation :  $k = -6$

On a alors  $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 0$

Dans cette situation la limite à gauche et la limite à droite existent et sont égales  
et donc il y a prolongement en 0 avec  $y(0) = 0$

**Solution de l'exercice 3 (Énoncé)** On suppose que la fonction  $y$  est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = y^2.$$

Remarque : Il y a  $y^2$  donc l'équation différentielle n'est pas linéaire et Donc les théories classiques ne s'appliquent pas.

1. On suppose que la fonction  $y$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{D}$ .

On considère la fonction  $z$  définie par  $z(x) = \frac{1}{y(x)}$  qui forcément ne s'annule pas

$$\text{On a } z(x) = \frac{1}{y(x)}$$

comme la fonction  $y$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{D}$

La fonction  $z$  est bien définie et ne s'annule pas sur  $\mathcal{D}$

$$\Rightarrow \text{On a donc } y(x) = \frac{1}{z(x)} \text{ et } y'(x) = [y(x)]' = \left[ \frac{1}{z(x)} \right]' = \frac{-z'(x)}{[z(x)]^2}$$

$$\text{Comme : } y'(x) + y(x) = [y(x)]^2$$

On remplace  $y(x)$  et  $y'(x)$

$$\Rightarrow \frac{-z'(x)}{[z(x)]^2} + \frac{1}{z(x)} = \left[ \frac{1}{z(x)} \right]^2$$

$$\Rightarrow -z'(x) + z(x) = 1 \text{ car } z(x) \text{ est tjs } \neq 0$$

2. La fonction  $z$  est solution d'une EDL1 complète *de la physique*

Ainsi  $z$  est la somme

> D'une solution particulière constante (à cause de la physique). On trouve  $\forall x \in \mathbb{R}, y_0(x) = 1$

> Des solutions de l'équation homogène, on trouve  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = K e^x$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = 1 + K e^x$$

Pour en déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{1 + K e^x}$  avec  $K > 0$  car on ne divise pas par 0.

Normalement on devrait synthétiser CàD vérifier que les fonctions ci-dessus conviennent

#### Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. On sait que  $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

> On dérive cette égalité  $\frac{d}{dx} [\dots] = \frac{d}{dx} [\dots]$ ,

$$\text{Ainsi } f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

> On applique  $f'(\square) = f\left(\frac{1}{\square}\right)$  avec  $\square = \frac{1}{x}$

$$\text{Ainsi } f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \text{ on a donc } f''(x) = \frac{-1}{x^2} f(x)$$

Conclusion : On a bien :  $\forall t > 0, t^2 f''(t) + f(t) = 0$ .

2. On considère la fonction  $g$  définie par  $g(u) = f(e^u)$ .

(a) On peut calculer le nombre  $g(u)$  Ssi  $e^u \in D_f = ]0, +\infty[$  Donc pas de problème car  $e^u > 0$ .

Ainsi  $g$  est def,  $C^0$  et même  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$

(b) On a  $g(u) = f(e^u)$

$$\implies g'(u) = [f(e^u)]' = e^u f'(e^u)$$

$$\text{et } g''(u) = [e^u f'(e^u)]' = e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u)$$

On a donc

$$A g''(u) + B g'(u) + C g(u) = A \left( e^u f'(e^u) + (e^u)^2 f''(e^u) \right) + B e^u f'(e^u) + C f(e^u)$$

$$= A (e^u)^2 f''(e^u) + (A + B) e^u f'(e^u) + C f(e^u)$$

Je choisis  $A = 1$  et  $A + B = 0$  et  $C = 1$

$$= (e^u)^2 f''(e^u) + f(e^u) = 0$$

Car c'est l'équa diff de Q1 avec  $t = e^u > 0$ .

(c) La fonction  $g$  est solution de l'équation différentielle

$$1 g''(u) + (-1) g'(u) + 1 g(u) = 0$$

C'est une EDL2, on sait la résoudre.

3. On sait que  $f(e^u) = g(u)$ , on applique avec  $u = \ln x$  ainsi

$$\forall x, x > 0, f(x) = g(\ln x)$$

$\implies$  **Attention** : Comme la résolution est longue, on a surement fait des  $\implies$  donc il faut vérifier parmi les solutions trouvées, celles qui effectivement vérifient  $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $f(1) = 1$

**Solution de l'exercice 5 (Énoncé)** Soit  $\omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{11}\right)$ .

On considère les complexes

$$S = \omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9 \quad \text{Et} \quad T = \omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10}$$

1. On a

- Tout d'abord on a le dessin d'un gâteau divisé en 11 parts égales.
- C'est marqué dessus, les Racines 11-ième de l'unité vérifient  $\omega^{11} = 1$ .
- Enfin on sait que  $1 + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{10} = 0$ .

2. On fait un bô dessin et on devine que

$$\overline{S} = T \quad \text{et} \quad \text{Im}S > 0$$

- Rappel :  $\overline{S}$  est le conjugué de  $S$  et  $\text{Im}S$  est la partie imaginaire de  $S$

3. Montrer  $S + T = -1$  et  $S.T = 3$ .

$$S + T = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{10} = -1 + (1 + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{10}) = -1$$

$$S.T = (\omega + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^9)(\omega^2 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^{10})$$

= On fait le méga développement

= On simplifie avec  $\omega^{11} = 1$  donc  $\omega^{12} = \omega^{11+1} = \omega$

= On trouve au final  $= 5 - 2(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{10}) = 5 - 2 = 3$

- On trouve facilement (par substitution)  $S^2 + S + 3 = 0$

On a donc 2 solutions possibles  $S_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11}$  et  $S_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}$

Or  $\text{Im}S > 0$  donc

$$S = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11} \quad \text{et} \quad T = \overline{S} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}$$

4. On a

$$\sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k = \sum_{k=0}^{10} (\square)^k - \underset{k=0}{\mathbf{1}} \quad \text{avec } \square = -\omega^3$$

$$= \frac{1 - \square^{11}}{1 - \square} - 1$$

$$= \frac{\square - \square^{11}}{1 - \square}$$

$$= \square \frac{1 - \square^{10}}{1 - \square}$$

$$= (-\omega^3) \frac{1 - \omega^{30}}{1 + \omega^3}$$

$$= (-\omega^3) \frac{1 - \omega^{-3}}{1 + \omega^3}$$

Argument moitié

$$= -\omega^3 \frac{\omega^{-3/2} (\omega^{3/2} - \omega^{-3/2})}{\omega^{3/2} (\omega^{-3/2} + \omega^{3/2})} = -\frac{2i \sin\left(3\frac{2\pi}{2.11}\right)}{2 \cos\left(3\frac{2\pi}{2.11}\right)} = -i \tan\left(3\frac{\pi}{11}\right)$$

$$\omega - \omega^{10} = \omega - \overline{\omega} = e^{i\frac{2\pi}{11}} - e^{-i\frac{2\pi}{11}} = 2i \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

On a donc

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4 \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i \sum_{k=1}^{10} (-\omega^3)^k - 2i (\omega - \omega^{10})$$

On détaille la somme

$$= i [-\omega^3 + \omega^6 - \omega^9 + \omega - \omega^4 + \omega^7 - \omega^{10} + \omega^2 - \omega^5 + \omega^8] - 2i (\omega - \omega^{10})$$

On factorise  $i$  et on reconnait  $S$  et  $T$

$$= i [T - S]$$

$$= i \left[ \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{11}\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{11}\right) \right]$$

$$= i [-i\sqrt{11}] = \sqrt{11} \quad \text{Yes.}$$

**Solution de l'exercice 6 (Énoncé)**1. J'applique (E) avec  $x = 0$  et  $y = 0$ 

$$\text{Ainsi } f(0) = f(0)f(0) \iff f(0)[1 - f(0)] = 0$$

Conclusion : On a  $f(0) = 0$  ou  $f(0) = 1$ 2. On suppose que :  $f(0) = 0$ Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . J'applique (E) avec  $x = t$  et  $y = 0$ 

$$\text{Ainsi } f(t) = f(t)f(0) = 0$$

Conclusion : Lorsque  $f(0) = 0$ , alors  $f$  est la fonction nulle, CàD  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$ .3. On suppose que  $f(0) = 1$ (a) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . J'applique (E) avec  $x = t/2$  et  $y = t/2$ 

$$\text{Ainsi } f(t) = f(t/2)f(t/2) = \square^2 \geq 0.$$

(b) Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , On dérive (E) par rapport à  $x$ 

$$\text{Ainsi } \frac{d}{dx} [f(x+y)] = \frac{d}{dx} [f(x)f(y)]$$

$$\text{Donc } \forall x, y, 1f'(x+y) = f(y)f'(x)$$

J'applique cette égalité avec  $x = 0$  et  $y = t$ , ainsi  $f'(t) = f(t)f'(0)$ Conclusion : la fonction  $f$  est solution de l'équa diff  $y' - ay = 0$  avec  $a = f'(0)$ (c) On résout l'EDL1 homogène et on trouve que :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = K e^{at}$ De plus on sait que  $f(0) = 1$  donc forcément  $K = 1$ Conclusion : Si  $f$  vérifie (E) et  $f(0) = 1$ Alors forcément il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{at}$ 

(d) Ce qu'on a fait précédemment c'est la fin de l'analyse.

On va maintenant faire la synthèse, CàD vérifier que lorsque  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{at}$ Alors la fonction  $f$  vérifie (E) et  $f(0) = 1$ 

$$> \text{On a bien } f(x+y) = e^{a(x+y)} = e^{ax}e^{ay} = f(x)f(y)$$

$$> \text{Et } f(0) = e^{a \cdot 0} = e^0 = 1$$

Conclusion : La synthèse valide, les fonctions dérivable vérifiant (E) sont  $f : x \mapsto e^{ax}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ 4. **Facultatif** On suppose que  $f$  est seulement continue sur  $\mathbb{R}$  et vérifie la relation (E)Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle admet des primitives. On note  $H$  l'une d'elle.Comme  $f$  est continue on primitive (E) par rapport à  $y$ 

$$\text{Ainsi } \forall x, y, H(x+y) = f(x)H(y) + K \implies \forall x, f(x) = \frac{H(x+1492) - K}{H(1492)}$$

Ainsi  $f$  s'exprime en fonction de fonction dérivable donc  $f$  est bien dérivable.