# Programme de colle de la semaine 7

du Lundi 10 Novembre au vendredi 14 Novembre.

**Questions de cours.** *On peut se dispenser de question de cours et faire que des Exo*

> Sur demande Une primitive difficile

Déterminer, sur $\mathbb{R}$, une primitive de $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$ puis de $\dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$

> EDL 1

Définir ce qu'est une EDL 1. Identifier l'équation homogène et le second membre.

Démontrer que les solutions d'une EDL 1 sont la somme : d'une sol part et des sols de l'éq homo

Explique les sens des articles : UNE et DES.

> EDL 1

Définir ce qu'est une EDL 1. Identifier l'équation homogène et le second membre.

Énoncer et démontrer le théorème donnant les solutions de l'équation homogène.

> EDL 2 Soit l'EDL 2, $y'' + \dfrac{\omega_0}{Q}\, y' + \omega_0^2\, y = 0$

Discuter selon la valeur de $Q$ le signe du discriminant de l'équation caractéristique.

Lorsque $\Delta < 0$, donner les solution de l'EDL 2

> Sur demande Principe de Cauchy

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $h$ une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$

On étudie l'équation différentielle : $(E)\ y' + a\, y = h(x)$

1. Montrer que, si $f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E)$,
   alors la fonction $g : x \longmapsto f(x+T)$ l'est aussi.
2. En déduire, avec principe de Cauchy, qu'une solution $f$ est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$
3. Écrire toutes les solutions de l'équa diff $(E)$.
   En déduire que l'équation $(E)$ admet une unique solution T-périodique.

**Exercices.**

Des équations différentielles

Il y a des corrections à la page suivante

Déterminer, sur $\mathbb{R}$, une primitive de $\dfrac{1}{2x^2+x+1}$ puis de $\dfrac{x+1}{2x^2+x+1}$

$$\begin{aligned}\text{On a } 2x^2+x+1 &= 2\left[x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right]\\ &= 2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2}\right]\\ &= 2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]\\ &= 2\frac{7}{16}\left[\frac{16}{7}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1\right]\\ &= \frac{7}{8}\left[\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{8}{7}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2\right]} \overset{\textit{Une primitive}}{\rightsquigarrow} \frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

On a maintenant

$$\frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{?(4x+1)+??}{2x^2+x+1} \overset{\textit{Une primitive}}{\rightsquigarrow} ?\ln\left|2x^2+x+1\right| + ??\frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

Soit l'EDL 2, $y''+\dfrac{\omega_0}{Q}\,y'+\omega_0^2\,y=0$

Discuter selon la valeur de $Q$ le signe du discriminant de l'équation caractéristique.
Lorsque $\Delta<0$, donner les solution de l'EDL 2

> C'est une EDL 2.
> Équation caractéristique

On résout $X^2+\dfrac{\omega_0}{Q}\,X+\omega_0^2\ =0$.

Le discriminant vaut $\Delta = b^2-4ac = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2-4.1.\omega_0^2$

Comme on veut le signe du discriminant, on fait FFB

$$\Delta = b^2-4ac = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2-4.\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2-4Q^2\omega_0^2}{Q^2} = \omega_0^2\frac{1-4Q^2}{Q^2} = \omega_0^2\frac{(1-2Q)(1+2Q)}{Q^2}$$

| $Q$ | $-\infty$ | | $-1/2$ | | $1/2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-2Q$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $1+2Q$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| signe $\Delta$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Lorsque $\Delta > \dfrac{1}{2}$, alors l'équation admet deux racines complexes

$$r = -\frac{\omega_0}{Q}+i\sqrt{\omega_0^2\frac{1-4Q^2}{Q^2}} = -\frac{\omega_0}{Q}+i\ \underbrace{\omega_0\sqrt{\frac{1-4Q^2}{Q^2}}}_{=\Omega_0}\ \text{ et } r'=\overline{r}$$

Conclusion : Les solutions sont $y(t) = A\,e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\cos(\Omega_0 t) + B\,e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}\sin(\Omega_0 t)$

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $h$ une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$
On étudie l'équation différentielle : $(E)$ $y' + a\,y = h(x)$

1. Montrer que, si $f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E)$,
   alors la fonction $g : x \longmapsto f(x+T)$ l'est aussi.
2. En déduire, avec principe de Cauchy, qu'une solution $f$ est T -périodique si et seulement si $f(0) = f(T)$
3. Écrire toutes les solutions de l'équa diff $(E)$.
   En déduire que l'équation $(E)$ admet une unique solution T-périodique.

1. On suppose que la fonction $f$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E)$,
   ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R},\; f'(x) + a\,f(x) = h(x)$

   La fonction $g : x \longmapsto f(x+T)$ est dérivable et comme $f$ est T-périodique $g(x) = f(x+T) = f(x)$
   Ainsi on a $g'(x) = f'(x)$

   Conclusion : $g'(x) + a\,g(x) = f'(x) + a\,f(x) = h(x)$,
   CàD la fonction $g$ est une solution de l'équation $(E)$

2. On fait $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$

   $\Longrightarrow$. On suppose que la fonction $f$ est T-périodique, ainsi $f(0) = f(T)$

   $\Longleftarrow$. On suppose que la fonction $f$ est une solution de l'équation $(E)$ et que $f(0) = f(T)$

   On va montrer que la fonction $f$ est T-périodique

   Les fonctions $f$ et $g$ vérifient la même EDL 1 et $g(0) = f(0+T) = f(T) = f(0)$
   ainsi d'après le principe de Cauchy d'ordre 1, on sait que $f = g$, CàD $\forall\, x,\; g(x) = f(x+T) = f(x)$
   Conclusion : la fonction $f$ est T-périodique

3. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$\forall\, x \;\; y(x) = y_0(x) + K\,e^{-a\,x}$$

Un solution est est T-périodique Ssi $y(T) = y(0)$

$$\begin{aligned} &\iff y_0(T) + K\,e^{-a\,T} = y_0(0) + K\,e^{-a\,0} \\ &\iff K\left[1 - e^{-a\,T}\right] = y_0(T) - y_0(0) \\ &\iff K = \frac{y_0(T) - y_0(0)}{[1 - e^{-a\,T}]} \end{aligned}$$

Conclusion : l'équation $(E)$ admet une unique solution T-périodique, lorsque $K = \dfrac{y_0(T) - y_0(0)}{[1 - e^{-a\,T}]}$