

Ensemble, Fonction.

1 Les ensembles	1	3 Bijection-Bijection Réciproque.	7
1.1 Les éléments.	1	3.1 Bijection.	7
1.2 Inclusion, Intersection,	2	3.2 Bijection réciproque.	8
1.3 Les ensembles $A \times B$ et $\mathcal{P}(E)$	3	4 Exercices	9
2 Fonction-Injectivité-Surjectivité.	4	5 Compléments	12
2.1 Les fonctions.	4	5.1 Fonction indicatrice.	12
2.2 Injectivité.	5	5.2 Restriction.	12
2.3 Antécédent-Image d'une fonction-Surjectivité.	6	5.3 Image direct et Image réciproque d'une partie.	12

1 Les ensembles

1.1 Les éléments.

Nous ne définirons pas rigoureusement la notion d'ensemble, celle-ci sera considérée comme intuitive. Nous nous contenterons de la « définition » suivante :

Définition 1.

Un ensemble E est une collection d'objets, ceux-ci sont appelés **éléments** de E .

> Lorsque x est un élément de E , on écrira $x \in E$ (se lit « x appartient à E »).

Dans le cas contraire on écrira $x \notin E$.

> L'ensemble vide, noté $\emptyset$, n'a pas d'élément

Ainsi $x \in \emptyset$ est oups!!!!

> Deux ensembles E et F sont dits égaux

Ssi ils ont les mêmes éléments, on écrira alors $E = F$.

> Un ensemble est présenté avec des accolades, CàD $\{...\}$.

Théorème

> Dans un ensemble, il n'y a ni ordre, ni de répétition,

CàD $\{1, 3, 2, 1, 1, 3\} = \{1, 2, 3\}$

> Quand on rencontre un ensemble E , il faut savoir ce que cela signifie sur les éléments,

CàD il faut savoir compléter, $x \in E \iff \dots\dots\dots$

Exemples : Faire l'exercice 5

Par exemples

> Les ensembles de nombre : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

> Les ensembles de matrices : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

> Les ensembles des fonctions de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, noté $\mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$.

1.2 Inclusion, Intersection, ...

Définition 2. Opérations sur les ensembles.

Soient A et B deux ensembles

> **L'inclusion** : On dit que A est inclus dans B , noté $A \subset B$,

Ssi tous les éléments de A sont également éléments de B , on a donc

$$A \subset B \iff \forall x, [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Vocabulaire : Quand $A \subset B$, on dit que A est une partie de B ou un sous ensemble de B .

Complément : $A \subsetneq B$ Ssi A est un sous ensemble strict de B , CàD $A \subset B$ mais $B \neq A$.

Pour démontrer que $A \subset B$

On suppose que $x \in A$

On veut démontrer $x \in B$

> **La réunion** : On note $A \cup B$ (se lit « A union B »), l'ensemble que l'on obtient en regroupant les éléments de A avec ceux de B . On a donc

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

> **L'intersection** : On note $A \cap B$ (se lit « A inter B »), l'ensemble des éléments communs à A et B . On a donc

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

> **La différence** : on note $A \setminus B$ (se lit « A moins B »), l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B . On a donc

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B$$

Vocabulaire : Lorsque B est une partie de A , CàD $B \subset A$, l'ensemble $A \setminus B$ est appelé le complémentaire de B dans A et on le note $C_A(B)$ ou $\mathcal{C}_A(B)$

> **Le complémentaire** : On note $\mathcal{C}(A)$ ou $\mathcal{C}_E(A)$ ou $\bar{A}$,

CàD l'ensemble des éléments qui ne sont pas dans A et qui sont dans E .

Théorème 3. Lois de Morgan, complémentaire

Soient A, B, C des ensembles.

> **Lois de Morgan**. L'intersection se distribue sur la réunion et "réciproquement"

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ et } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

> **Avec le complémentaire**

$$> \mathcal{C}_E(\emptyset) = E, \quad \mathcal{C}_E = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E(A)) = A.$$

$$> A \cup \mathcal{C}_E(A) = E \quad \text{et} \quad A \cap \mathcal{C}_E(A) = \emptyset.$$

$$> \mathcal{C}_E(A \cap B) = \mathcal{C}_E(A) \cup \mathcal{C}_E(B) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_E(A \cup B) = \mathcal{C}_E(A) \cap \mathcal{C}_E(B)$$

Faites des patatoïdes et visualiser

1.3 Les ensembles $A \times B$ et $\mathcal{P}(E)$.

Définition 4. Les ensembles $A \times B$ et $\mathcal{P}(E)$.

Le Produit Cartésien $A \times B$ et $A \times A = A^2$

Soient A et B deux ensembles.

Le produit cartésien de A et B , noté $A \times B$, c'est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$.
On a donc

$$(x, y) \in A \times B \iff x \in A \text{ et } y \in B$$

L'ensemble $A \times A$ est noté A^2

Remarque : Ne pas confondre parenthèse et accolade, couple et ensemble.

> Dans le couple $(1, 2)$ l'ordre est important,

CàD $(1, 2) \neq (2, 1)$ et il peut y avoir des répétitions, CàD $(1, 1) \neq (1)$.

> Par contre pour les ensembles

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}, \{1, 1\} = \{1\} \text{ et } \{2, 1, 1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 2\}$$

De même on définit $A_1 \times \dots \times A_n$ et $A \times A \times \dots \times A = A^n$

L'ensemble des Parties $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble.

On a déjà vu que A est une partie de E ou un sous ensemble de E Ssi $A \subset E$.

L'ensemble des parties de E est, noté $\mathcal{P}(E)$. On a donc

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

La notion est subtile car : à gauche, c'est $\in$ et à droite, c'est $\subset$

Exemple. Soit $E = \{1, 2\}$. On va déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Pour déterminer $\mathcal{P}(E)$, il faut décrire $\mathcal{P}(E)$.

Comme E a 2 éléments, les parties ou sous ensemble de E ont : soit 0, soit 1, soit 2 éléments.

> Il y a 1 partie à 0 élément : c'est $\emptyset$.

> Il y a 2 parties à 1 élément : ce sont $\{1\}$ et $\{2\}$.

> Il y a 1 parties à 2 éléments : c'est $E = \{1, 2\}$.

$$\textbf{Conclusion : } \mathcal{P}(E) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \underbrace{\{1, 2\}}_{=E} \right\}$$

2 Fonction-Injectivité-Surjectivité.

2.1 Les fonctions.

Définition 5. Définition et propriétés des fonctions.

Soit $\mathcal{D}$ et A deux ensembles.

Une fonction f de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est une correspondance qui, à tous éléments x de $\mathcal{D}$ associe un unique élément de A noté $f(x)$.

Les fonctions numériques sont les fonctions avec $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$.

Les fonctions numériques ont le bonus d'avoir un graphe et ça aide.

Attention : les fonctions que l'on étudiera ne sont pas à priori des fonctions numériques.

Vocabulaire.

> $\mathcal{D}$, c'est l'ensemble de *Départ*/*Définition*/*Domaine* de la fonction f .

> l'élément $f(x) \in \mathcal{A}$, c'est la fonction f appliquée, évaluée en x .

Exemples autre que numérique.

> Les fonctions "complexes.

La fonction $h : z \mapsto \frac{2z+3}{2z-i}$ est une fonction définie de $\mathbb{C} - \{i/2\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

> La fonction associée à une matrice.

Soit A une matrice de taille n, p .

La fonction associée à la matrice A , c'est la fonction, notée h_A , de $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ à valeurs $\mathcal{A} = \mathbb{R}^p$ définie par

$$\forall \vec{U} \in \mathbb{R}^n, \quad h_A(\vec{U}) = A\vec{U}$$

> Opérateur de dérivation.

On note > $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue

> $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continument dérivable

L'opérateur de dérivation est l'opérateur/fonction, notée D , qui, à une fonction f dérivable, associe sa dérivée f' .

On a donc $\forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), D(f) = f'$ ou bien $f : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f \longmapsto D(f) = f'$$

À savoir sur des fonctions.

> La fonction f Versus Le nombre $f(x)$

Ne pas confondre : la fonction f et le nombre $f(x)$

Vocabulaire : Le nombre $f(x)$ c'est la fonction évaluée/appliquée en x .

> Si $x = 2$ alors $f(x) = f(2)$

et plus généralement : Si $x = x'$ alors $f(x) = f(x')$

Vocabulaire : On dit que $f(2)$ c'est l'image de 2 par la fonction f

> L'ensemble de définition : Le nombre $f(\square)$ se calcule Ssi $\square \in \mathcal{D}$

Exemple : Le nombre $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ se calcule Ssi

> Pour les propriétés de l'ensemble $\mathcal{A}$ et la notion d'antécédent, voir la section "Surjectivité"

Théorème 6.

Les propriétés de la fonction f s'exprime avec $\mathcal{D}$ omaine, Quantificateur et $f(x)$

Exemples Soit f une fonction numérique

> On dit que la fonction f est positive I , noté $f \geq 0$

Ssi

> On dit que la fonction f est croissante sur I , noté $f \nearrow$

Ssi

> On dit que la fonction f s'annule sur I

> On dit que la fonction f ne s'annule pas sur I

> On dit que la fonction f est constante sur I

> On dit que les fonction f et g n'est pas sur I

> On dit que les fonction f et g sont égales sur I

> On dit que les fonction f et g ne sont pas égales sur I

2.2 Injectivité.

Définition 7. Définition de l'injectivité.

On considère une fonction f définie de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.

On dit que la fonction est injective Ssi

$$\forall (x, x') \in \mathcal{D}^2, [f(x) = f(x') \implies x = x']$$

Attention à ne pas confondre :

> la définition de l'injectivité

> et la propriété "naturelle" des fonctions, CàD $[x = x' \implies f(x) = f(x')]$

Pour démontrer que la fonction f est injective.

On suppose que $f(x) = f(x')$

On veut démontrer $x = x'$

Théorème 8. Résultats classiques

> L'interprétation/visualisation de l'injectivité avec les graphes

> Soit f et g des fonctions composables

La fonction f est injective

La fonction g est injective

$\left. \begin{array}{l} \text{La fonction } f \text{ est injective} \\ \text{La fonction } g \text{ est injective} \end{array} \right\} \implies \text{la composée } [g \circ f] \text{ est injective}$

$\text{la composée } [g \circ f] \text{ est injective} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{La fonction } f \text{ est injective} \\ \text{Par contre, on ne sait rien pour la fonction } g \end{array} \right.$

> Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.

Si/Lorsque la fonction f est injective

alors $\forall b \in \mathcal{A}$, l'équation $f(X) = b$ admet 0 ou 1 solution (dans $\mathcal{D}$).

Application : Par contraposée

Si on trouve $b_0 \in \mathcal{A}$ tel que l'équation $f(X) = b_0$ admet 2 (ou plus) solutions distinctes dans $\mathcal{D}$

Alors la fonction f n'est pas injective.

2.3 Antécédent-Image d'une fonction-Surjectivité.

Définition 9. Antécédent-Image d'une fonction.

On considère une fonction f définie de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.

> Quand on a dit que la fonction f est à valeurs dans $\mathcal{A}$,

cela signifie que forcément $\forall x \in \mathcal{D}, f(x) \in \mathcal{A}$

> On dit que $b \in \mathcal{A}$ admet un antécédent

Ssi /il existe $a_0 \in \mathcal{D}$ tel que /on peut trouver $a_0 \in \mathcal{D}$ tel que /on peut écrire/ $f(a_0) = b$

ainsi un antécédent a_0 est une solution de l'équation $f(X) = b$

> L'image de la fonction f , noté $\text{Im}(f)$,

c'est l'ensemble des éléments $b \in \mathcal{A}$ qui ont un antécédent.

On a donc $b \in \text{Im}(f) \iff$ Il existe $a \in \mathcal{D}$ tq $b = f(a)$

$\iff$ On peut écrire $b = f(a)$

À retenir.

> $b \in \text{Im}(f)$ Ssi l'équation $f(X) = b$ admet une ou plusieurs solution dans $\mathcal{D}$.

> $b \notin \text{Im}(f)$ Ssi l'équation $f(X) = b$ n'a pas de solution dans $\mathcal{D}$.

Définition 10. Définition de la surjectivité.

On considère une fonction f définie de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.

On dit que la fonction est surjective Ssi $\text{Im}(f) = \mathcal{A}$

On sait que $\text{Im}(f)$, c'est l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ effectivement atteints par f , on a donc

La fonction f est surjective

Ssi TOUS les éléments de $\mathcal{A}$ sont effectivement atteints

CàD $\forall y \in \mathcal{A}, \exists x_{\text{qui dépend de } y} \in \mathcal{D}$ tel que $f(x) = y$

Théorème. La fonction f est surjective Ssi

Ssi pour TOUT $b \in \mathcal{A}$, l'équation $f(X) = b$ admet 1 solution ou plus dans $\mathcal{D}$.

Ssi pour TOUT $b \in \mathcal{A}$, on peut écrire $b = f(a)$

Théorème 11. Résultats classiques

> L'interprétation/visualisation de l'injectivité avec les graphes

$\left. \begin{array}{l} \text{> La fonction } f \text{ est surjective} \\ \text{La fonction } g \text{ est surjective} \end{array} \right\} \implies \text{la composée } [g \circ f] \text{ est surjective}$

$\text{> la composée } [g \circ f] \text{ est surjective} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{La fonction } g \text{ est surjective} \\ \text{Par contre, on ne sait rien pour la fonction } f \end{array} \right.$

Exemples

> Les fonctions *Sinus* est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais $\text{Im}(\text{Sinus}) = [-1, 1]$.

La fonction Sinus n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ mais est surjective sur $[-1; 1]$

> Les fonctions $[X^2 : x \mapsto x^2]$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais $\text{Im}([X^2]) = [0, +\infty[$.

La fonction X^2 n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ mais est surjective sur $\mathbb{R}_+$

> Les fonctions $[X^3 : x \mapsto x^3]$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\text{Im}([X^3]) = \mathbb{R}$.

La fonction X^3 est surjective sur $\mathbb{R}$.

3 Bijection-Bijection Réciproque.

3.1 Bijection.

Définition 12. bijectivité-fonction identité.

Définition de la bijectivité.

On considère une fonction f définie de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.

On dit que la fonction f est bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{A}$

Ssi la fonction f est injective ET surjective.

La fonction identité.

Soit E un ensemble.

La fonction "identité de E ", notée id_E , est définie par : $\forall x \in E, id_E(x) = x$.

La fonction "identité de E " réalise une bijection de E sur E .

Théorème 13.

> L'interprétation/visualisation de la bijectivité avec les graphes

> Bijection et Équation.

Soit f une fonction bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$.

Alors l'équation $f(x) = b$ admet une et une seule solution dans $\mathcal{D}$

> Bijection et composée. Soit f et g des fonctions composables

$$\left. \begin{array}{l} \text{La fonction } f \text{ est bijective} \\ \text{La fonction } g \text{ est bijective} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Alors la fonction } g \circ f \text{ est bijective} \\ \text{et } [g \circ f]^{-1} = \text{Contravariant} = f^{-1} \circ g^{-1} \end{array}$$

$$\text{la composée } [g \circ f] \text{ est bijective} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{La fonction } f \text{ est injective} \\ \text{La fonction } g \text{ est surjective} \end{array} \right.$$

> Le Théorème de la bijection monotone.

Soit f une fonction numérique de $]a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue sur }]a, b] \\ f \text{ est strict croissante sur }]a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Alors la fonction } f \\ \text{réalise une bijection} \\ \text{de }]a, b] \text{ sur } \text{Im}(f) =]f(a^+), f(b)] \end{array}$$

De plus Si $m \in \text{Im}(f) =]f(a^+), f(b)]$

alors l'équation $f(X) = m$ admet une unique solution dans $]a, b]$.

3.2 Bijection réciproque.

Définition 14. Définition et propriétés du nombre $f^{-1}(b)$.

Soit f une fonction bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{A}$.

$$f^{-1}(b) = \left| \begin{array}{l} \text{l'unique solution dans } \mathcal{D} \\ \text{de l'équation } f(X) = b \end{array} \right.$$

De plus le nombre $f^{-1}(b)$ admet les propriétés suivantes

- > $f^{-1}(b)$ appartient à $\mathcal{D}$ et $f^{-1}(b)$ se calcule ssi $b \in \mathcal{A}$
- > $f^{-1}(b)$ est une solution l'équation $f(X) = b$ donc $f(f^{-1}(b)) = b$

Théorème. Pour expliciter la fonction f^{-1} ,
on utilise : $f(x) = y \iff \dots \iff x = f^{-1}(y)$.

Théorème 15. Propriétés naturelles de la fonction bijection réciproque.

On suppose que f est une fonction (numérique) bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{A}$, stric croissante, impaire

Alors la bij rec f^{-1} réalise une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{D}$, stric croissante, impaire

On suppose que f est une fonction continue, dérivable et f' ne s'annule pas

Alors la fonction bij rec f^{-1} est continue et dérivable et on a $[f^{-1}]' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Exemples : Les couples célèbres : bijections - bijection réciproques .

- > Le couple : id_E, id_E .
- > Le couple : $\ln, \exp$.
- > Le couple : $[X^2]_{principale}, [\sqrt{X}]$.

On n'est pas en φ ICI

$$\tan \neq \tan_p = \tan_{principale}$$

$$\sin \neq \sin_p = \sin_{principale}$$

> Le couple : $\tan_p, \arctan$.

> Le couple : $\sin_p, \arcsin$.

Théorème 16. Évident mais en fait plus subtil.

Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ et g une fonction de $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{D}$. On a

$$\left. \begin{array}{l} g \circ f = id_{\mathcal{D}} \\ f \circ g = id_{\mathcal{A}} \end{array} \right\} \implies \text{Alors la fonction } f \text{ est bijective et } f^{-1} = g$$

Ce résultat est plus subtil

car il faut absolument les 2 égalités $g \circ f = id_{\mathcal{D}}$ et $f \circ g = id_{\mathcal{A}}$ pour conclure.

Complément "évident" : Soit f une fonction bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{A}$ et f^{-1} sa bijection réciproque.

- > f^{-1} est bijective et $[f^{-1}]^{-1} = f$.
- > D'après le définition de $f^{-1}(b)$, on a que $f^{-1}(b)$ est une solution de l'équation $f(X) = b$
Ainsi on a $\forall y \in \mathcal{A}, f(f^{-1}(y)) = y$, cela signifie $f \circ f^{-1} = id_{\mathcal{A}}$
- > Comme f^{-1} est bijective, on a de façon symétrique
 $\forall x \in \mathcal{D}, f^{-1}(f(x)) = x$, cela signifie $f^{-1} \circ f = id_{\mathcal{D}}$

4 Exercices

—— Manipulation sur les ensembles ——

Exercice 1. Ensemble et patatoïde.

- On suppose que $A \subsetneq B$.
Faites des patatoïdes et visualiser $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$.
Faites des patatoïdes et visualiser $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- On suppose que $A \cap B = \emptyset$.
Faites des patatoïdes et visualiser $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Exercice 2. Soit $E = \{x, y, z\}$ un ensemble. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- | | | | |
|----------------------|------------------------------|---|-------------------|
| 1. $x \in E$ | 4. $\emptyset \in E$ | 7. $\{x, y\} \in E$ | 10. $E \subset E$ |
| 2. $\{x\} \in E$ | 5. $\emptyset \subset E$ | 8. $\{x, y\} \subset E$ | 11. $E \in E$ |
| 3. $\{x\} \subset E$ | 6. $\{\emptyset\} \subset E$ | 9. $\{z, y\} \subset E \setminus \{x\}$ | |

Exercice 3. Pour les ensembles suivants compléter $x \in E \iff \dots$

$$E = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}, E = \{1, 10, 100, 1000, \dots\}, E = \mathbb{Q}, E = [0, 1[$$

Exercice 4. > "Traduire" les ensembles suivants

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^{2n} = 1\}$ $\{x \in \mathbb{C} \mid x^{2n} = 1\}$ $\{x \in \mathbb{C} \mid x^{2n+1} = -1\}$ $\{x \in \mathbb{C} \mid \bar{x} = x\}$ $\{z \in \mathbb{C} \mid z-1 = z+1 \}$	$\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ $\{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } x - y = 0\}$ $\{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y' + 2y = 0\}$
---	--

> Est-ce que $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$? Est-ce que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

> Est-ce que l'ensemble des fonctions continues est la réunion des fonctions croissantes et des fonctions décroissantes ?

Exercice 5. [Correction] On considère

$$A = \left\{ \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \right\}_{k \in \mathbb{N}^*, \varepsilon \in \{-1, 1\}} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right\}_{n, m \in \mathbb{N}^*}$$

> Recopier et compléter : $x \in A \iff \dots$ et $x \in B \iff \dots$

> Montrer que : $A \subset B$

Exercice 6.

- Soit E un ensemble et A, B, C des partie/sous-ensemble de E . Montrer que : $A \cup B = A \cap B \iff A = B$
- Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{array} \right\} \implies B \subset C$$

Exercice 7. On considère $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

- On suppose que $n = 4$. Lister tous les éléments de $\mathcal{P}(E_4)$
- Combien-y-a-t-il de parties de E_n qui ont exactement 0 élément ? Combien qui ont exactement 1 élément ?
Combien qui ont exactement 2 éléments ?

Soit $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Combien-y-a-t-il de parties de E_n qui ont exactement k éléments

- En déduire qu'il y a exactement 2^n parties dans $\mathbb{E}_n$, CàD que l'ensemble $\mathcal{P}(E_n)$ admet exactement 2^n éléments.

Injection-Surjection

Exercice 8. Soit $h: x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

1. Étudier la fonction h et faire son graphes
2. La fonction h est-elle injective ? surjective ? Déterminer $\text{Im}(h)$.
3. Déterminer $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{A}_0$ tel que la fonction f réalise une bijection de $\mathcal{D}_0$ sur $\mathcal{A}_0$.

Exercice 9. [Correction] Soit la fonction h de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$h(x, y) = (x e^y, x e^{-y}).$$

1. Déterminer les antécédents de $(0, 0)$. Que peut-on conclure ?
2. Justifier que $(-6, 6)$ n'a pas d'antécédent par h . Que peut-on conclure ?
3. Trouver des conditions sur a et b pour que (a, b) ait des antécédents. Que peut-on conclure ?

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? sont-elles surjectives ?

$$\begin{array}{lll} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longrightarrow x + y & (x, y) \longrightarrow (x + y, x - y) & (x, y) \longrightarrow (x + y, x^2 - y^2) \end{array}$$

Exercice 11. [Correction] On considère les fonctions f et g de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{Lorsque } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{Lorsque } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Autour de f .	Autour de g .	Calculer
1. Calculer $f(0), f(1), f(2), f(3)$.	1. Calculer $g(0), g(1), g(2), g(3)$.	$[g \circ f](n)$ et $[f \circ g](n)$.
2. La fonction f est-elle injective ?	2. La fonction g est-elle injective ?	
3. La fonction f est-elle surjective ?	3. La fonction g est-elle surjective ?	
		Que peut-on conclure ?

Exercice 12. [Correction] On considère l'opérateur de dérivation, CàD $D: f \mapsto D(f) = f'$

1. Préciser $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition de l'opérateur D .
2. Est ce que l'opérateur de dérivation est injectif ?
3. Justifier que $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continue appartient à $\text{Im}(D)$ l'image de D .
4. À votre avis, l'opérateur de dérivation est-il surjectif ?

Exercice 13. Soit f, f_1, g, g_1 des fonctions

1. On suppose que la fonction f est injective.
Montrer que : $f \circ g = f \circ g_1 \implies g = g_1$
2. On suppose que la fonction g est surjective.
Montrer que : $f \circ g = f_1 \circ g \implies f = f_1$

——— Bijection-Bijection Reciproque. ———

Exercice 14. Soient $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ et $h: G \rightarrow E$ trois fonctions.

1. On suppose que : $f \circ h \circ g$ est une application surjective et que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont des fonctions injectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.
2. On suppose que : $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des fonctions bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 15. [Correction] Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ quatre ensembles. Soient $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{D}$ trois fonctions. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des fonctions bijectives.

1. Justifier sans calcul que g est bijective. On notera g^{-1} la bijection réciproque.
2. Exprimer f à l'aide de deux fonctions bijectives.
Ainsi f est bijective.
3. Montrer que h est bijective.

Exercice 16. [Correction] Soient f, g deux fonction de E à valeurs dans E . On suppose que :

$$> f \circ g \circ f = g \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = f$$

$$> f \text{ est injective.}$$

1. Justifier que : g est injective
2. Montrer que : $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g = f$.
En déduire que $\forall e \in E, [g \circ f \circ g \circ f \circ g](e) = e$.
3. En déduire que g et f sont bijectives.

5 Compléments

5.1 Fonction indicatrice.

Définition 17. Fonction indicatrice d'une partie.

Soit E un ensemble et A une partie de E , ainsi $A \subset E$.

La fonction indicatrice de la partie A , notée $\mathbf{1}_A$ est la fonction de E à valeurs dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\forall x \in A, \mathbf{1}_A(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \notin A, \mathbf{1}_A(x) = 0$$

5.2 Restriction.

Définition 18. Restriction d'une fonction à une partie.

Soit E un ensemble et E' une partie de E , ainsi $E' \subset E$.

Soit f une fonction de E à valeurs dans $\mathcal{A}$.

La restriction de f à E' , notée $f|_{E'}$, est la fonction

$$\forall x \in E', f|_{E'}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \notin E', f|_{E'}(x) = \text{N'est PAS défini}$$

Exemple. La fonction $\tan$ n'est PAS bijective mais $\tan|_{]-\pi/2, \pi/2[}$ est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$

Et la fonction $\arctan$ est la bijection réciproque de $\tan|_{]-\pi/2, \pi/2[}$

5.3 Image direct et Image réciproque d'une partie.

Définition 19.

Image directe d'une partie de $\mathcal{D}$

On considère une fonction f de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.

Soit $E \subset \mathcal{D}$ une partie de $\mathcal{D}$.

L'image directe de E , noté $f \langle E \rangle$ ou $f(E)$, c'est l'ensemble

$$\begin{aligned} f \langle E \rangle &= \{y \in \mathcal{A} \text{ tel que } \exists x \in E \text{ avec } y = f(x)\} \\ &= \text{c'est l'ensemble des valeurs atteintes avec les éléments de } E \end{aligned}$$

Conclusion : $y \in f \langle E \rangle$ alors on peut écrire $y = f(x)$ avec un certain $x \in E$.

Image réciproque d'une partie de $\mathcal{A}$

On considère une fonction f de $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.

Soit $F \subset \mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{A}$.

L'image réciproque de F , noté $f^{-1} \langle F \rangle$ ou $f^{-1}(F)$, c'est l'ensemble

$$f^{-1} \langle F \rangle = \{x \in \mathcal{D} \text{ tel que } f(x) \in F\}$$

Conclusion : $x \in f^{-1} \langle F \rangle \iff f(x) \in F$.

Correction.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé) On a

$$x \in A \iff x \text{ "est de la forme" } \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \iff \left| \begin{array}{l} \text{Il existe } \varepsilon \in \{-1, 1\} \text{ et } k \in \mathbb{N}^* \\ x = \frac{\varepsilon}{k(k+1)} \end{array} \right.$$

De même

$$x \in B \iff \left| \begin{array}{l} \text{Il existe } n, m \in \mathbb{N}^* \\ x = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \end{array} \right.$$

On va montrer que $A \subset B$.

On suppose que $x \in A$.

On va montrer que $x \in B$, CàD $x = \frac{1}{\square} - \frac{1}{\square'}$

Comme $x \in A$, on peut écrire $x = \frac{\varepsilon}{k(k+1)}$ avec $\varepsilon, k \in \dots$

De plus on a

$$x = \frac{\varepsilon}{k(k+1)} = \varepsilon \frac{1}{k(k+1)} = \varepsilon \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right]$$

Je choisis $n = \frac{k}{\varepsilon} = \varepsilon k$ et $m = \varepsilon(k+1)$. Ils conviennent.

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. Les antécédents de $(0,0)$ sont les solutions de l'équation $h(X, Y) = (0,0)$.

On résout

$$\begin{aligned} h(X, Y) = (0,0) &\iff h(x, y) = (0,0) \iff (xe^y, xe^{-y}) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} xe^y = 0 \\ xe^{-y} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Or } xe^y = 0 \iff x = 0 \text{ ou } e^y = 0 \iff x = 0 \quad \text{et} \quad xe^{-y} = 0 \iff x = 0 \text{ ou } e^{-y} = 0 \iff x = 0$$

Conclusion : les antécédents de $(0,0)$ sont les $(0, y)$ avec qq $y \in \mathbb{R}$.

Comme l'équation $h(X) = (0,0)$ admet une infinité de solutions la fonction h n'est pas injective.

2. Les antécédents de $(6, -6)$ sont les solutions de l'équation $h(X) = (6, -6)$.

On résout

$$\begin{aligned} h(X) = (6, -6) &\iff h(x, y) = (6, -6) \iff (xe^y, xe^{-y}) = (6, -6) \\ &\iff \begin{cases} xe^y = 6 \\ xe^{-y} = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

On multiplie les deux équations, ainsi $x^2 = -36 < 0$. Or $x \in \mathbb{R}$ donc c'est absurde !!!

L'équation $h(X) = (6, -6)$ n'a donc pas de solution

Conclusion : $(6, -6)$ n'a pas d'antécédent.

Comme l'équation $h(X) = (6, -6)$ n'a pas de solution, la fonction h n'est pas surjective.

Solution de l'exercice 11 (Énoncé)

1. Autour de f .

(a) On a $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$.

(b) On suppose que $f(n) = f(n')$

On veut montrer : $n = n'$

On a $f(n) = f(n') \Rightarrow 2n = 2n' \Rightarrow n = n'$. Fini.

Donc la fonction f est injective.

(c) On résout l'équation $f(X) = 1$

$$f(X) = 1 \iff 2X = 1 \iff X = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

Donc l'équation $f(X) = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, Donc f n'est pas surjective.

2. Autour de f .

(a) On a $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, $g(2) = 1$, $g(3) = 1$.

(b) On a $0 \neq 1$ et $g(0) = g(1) = 0$

Donc la fonction g n'est pas injective.

(c) Soit $b \in \mathbb{N}$. On résout l'équation $g(X) = b$

$X = 2b$ est une solution "évidente" de cette équation car $g(2b) = (2b)/2 = b$

Donc les équations $g(X) = b$ ont toujours des solutions dans $\mathbb{N}$, Donc g est surjective.

3. On a "facilement" : $\forall n \in \mathbb{N}$, $[g \circ f](n) = \dots = n$

Donc $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$.

4. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, [f \circ g](n) = \begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair} & = n \\ \text{Si } n \text{ est impair} & = n - 1 \end{cases}$$

Donc $f \circ g \neq id_{\mathbb{N}}$

Solution de l'exercice 12 (Énoncé)

1. On peut calculer $D(f)$ Ssi la fonction f est dérivable.

Donc $\mathcal{D}$ c'est l'ensemble des fonctions dérivables.

2. Non car les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x + 1$ ont la même dérivée.

Plus généralement les fonctions f et $f + K$ ont la même dérivée.

3. On sait (mais on ne l'a pas encore démontré) que si f est une fonction continue alors elle admet des primitives.

Donc $f \in \text{Im}(D)$. Conclusion : On a bien $\mathcal{C}^0 \subset \text{Im}(D)$

Justifier que $\mathcal{C}^0$ l'ensemble des fonctions continue appartient à $\text{Im}(D)$ l'image de D .

4. Non il existe des fonctions qui n'ont pas de primitives.

Par exemple la fonction "échelon" de la physique n'a pas de primitive.

On démontrera ça plus tard car on a besoin du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé) Soient $f: E \rightarrow F$, $g: F \rightarrow G$ et $h: G \rightarrow H$ trois applications.

On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des applications bijectives.

1. On a

$g \circ f$ est bijective $\Rightarrow f$ est injective et g est surjective

$h \circ g$ est bijective $\Rightarrow g$ est injective et h est surjective

Ainsi g est injective et surjective donc bijective.

On notera g^{-1} la bijection réciproque.

2. On a facilement

$$f = (g^{-1} \circ g) \circ f = g^{-1} \circ (g \circ f)$$

Comme $g \circ f$ et g^{-1} sont bijective, on sait que $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective.

On notera f^{-1} la bijection réciproque.

3. On a facilement

$$h = h \circ (g \circ g^{-1}) = (h \circ g) \circ g^{-1}$$

Comme $h \circ g$ et g^{-1} sont bijective, on sait que h est bijective.

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

1. Comme $g \circ f \circ g = f$ et f est injective donc g est injective.

2. On a $f = g \circ f \circ g = [f \circ g \circ f] \circ f \circ g = f \circ g \circ f \circ f \circ g$.

Cette égalité signifie que :

$$\forall e \in E, f(e) = [f \circ g \circ f \circ f \circ g](e) = f([g \circ f \circ f \circ g](e))$$

c'est une égalité de la forme $f(\square) = f(\square')$

On applique la définition de f injective avec $\square = e$ et $\square' = [g \circ f \circ f \circ g](e)$

$$\text{Ainsi } \forall e \in E, e = [g \circ f \circ f \circ g](e)$$

3. Comme $\forall e \in E, e = [g \circ f \circ f \circ g](e)$,

$$\text{on a donc } g \circ f \circ f \circ g = id_E$$

Ainsi $g \circ f \circ f \circ g = id_E$ et id_E est bijective donc g est surjective !!!

Ainsi g est surjective et injective, g est donc bijective.

On termine facilement avec $f \circ g \circ f = g$ et g bijective donc f est surjective.