
 Trigo

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

On considère, pour $n \geq 2$, les nombres $P_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $g_n = P_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1. Calculer g_{n+1} en fonction de g_n
2. En déduire que : $\forall n \geq 2, P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
3. On admet que $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice 2. [Correction] Soit $n \geq 2$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

On considère, pour $n \geq 2$, les nombres $P_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $g_n = P_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1. Simplifier $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$. En déduire que : $\forall n \geq 2, P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
2. On admet que $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice 3. [Correction] Soit $n \geq 2$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

On considère, pour $n \geq 2$, les nombres $P_n = \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ et $g_n = P_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \geq 2, P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$
2. On admet que $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Exercice 4. [Correction] Une jolie formule

- > Justifier que : $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- > Démontrer par récurrence que Si $n \geq 2$,

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^n} \quad \text{Il y a } (n-1) \text{ symboles } \sqrt{\dots}$$

Exercice 5. Les questions sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
2. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
3. Démontrer que : $\forall x \in [0, 1], \arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x - 1)$
4. Montrer que : $\forall x \geq 0, \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x)$

Exercice 6. [Correction] On va montrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

1. Méthode 1. A l'aide d'une étude de fonction, montrer l'égalité.
2. Méthode 2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Je note : $A = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$ et $B = \arctan(p+1) - \arctan(p)$.

Montrer que A et B sont des solutions de l'équation $\tan(X) = \frac{1}{1+p+p^2}$

Encadrer A et B . Conclure.

3. Application : Simplifier puis calculer la limite quand $n \rightarrow \infty$ de : $S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$

Exercice 7. [Correction] On considère la fonction $h : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2})$

1. Déterminer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
2. Calculer et simplifier h'
3. En déduire une expression simplifiée de $h(x)$

Suite classique d'ordre 2

Exercice 8. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer **par récurrence** qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que

$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}.$$

On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

Calculer a_0, b_0 , et a_1, b_1 .

2. Montrer que la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence d'ordre 2.

En déduire a_n en fonction de n .

3. Montrer que $\forall n, a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.

En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(2 + \sqrt{3})^n = \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1}$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Simplifier $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$.

$$\text{On a } \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha.$$

$$\text{En déduire que : } \forall n \geq 2, P_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{On va télescoper } P_n &= \prod_{k=2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}\right) \\ &= \text{On va télescoper} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^1}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^3}\right)} \cdots \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}} \end{aligned}$$

2. On admet que $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin(\square)}{\square}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}} &= \frac{1}{2^{n-1} \sin \square} \quad \text{avec } \square = \frac{\pi}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n-1} \frac{\sin \square}{\square} \square} \\ &= \frac{1}{2^{n-1} \frac{\sin \square}{\square} \frac{\pi}{2^n}} \\ &= \frac{\pi}{2 \frac{\sin \square}{\square}} \end{aligned}$$

Conclusion : Quand $n \rightarrow \infty$ alors $\square = \frac{\pi}{2^n} \rightarrow 0$

$$\text{Ainsi on a } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\pi}{2 \frac{\sin \square}{\square}} = \frac{2}{\pi}$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Récurrence
2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{\infty \sin(0)}$, c'est une FI avec $\sin(0)$ donc va utiliser l'approximation linéaire.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n+1} [\square + o(\square)]} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + o\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) On fait par récurrence

$$H\langle n \rangle : \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^n} \quad \text{Il y a } (n-1) \text{ symboles } \sqrt{\dots}$$

L'initialisation est facile, on fait l'hérédité.

$$\rightarrow \frac{H\langle n \rangle \Rightarrow H\langle n+1 \rangle ?}{\text{On suppose } H\langle n \rangle,}$$

On veut montrer $H\langle n+1 \rangle$

$$\text{On espère avoir } \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2}}}}} &= \sqrt{2 + (\text{Ici on reconnaît } H(n))} \\
 &= \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^n}} \\
 &= \text{Intermédiaire} \\
 &= \dots \text{formule trigo (duplication)} \dots = \text{Final}
 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. On va montrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$$

(a) Méthode 1. On étudie la fonction h définie par l'expression

$$h : x \mapsto f(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$$

La fonction est dérivable sur $\mathcal{D}' = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) &= \frac{d}{dx} \left[\arctan(x+1) - \arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) \right] \\
 &= [1+x]' \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+(x)^2} - \left[\frac{1}{1+x+x^2} \right]' \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} - (1+2x) \frac{-1}{(1+x+x^2)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{2+2x+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2} \\
 &= \frac{-1-2x}{(2+2x+x^2)(1+x^2)} + \frac{1+2x}{1+(1+x+x^2)^2} \\
 &\quad \text{Or on remarque que : } (2+2x+x^2)(1+x^2) = \dots \\
 &\quad \text{et } 1+(1+x+x^2)^2 = \dots \\
 &\quad \text{Donc c'est égal !!!!!} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

D'où le tableau

x	$-\infty$	∞
$g'(x)$	0	
$g(x)$	$\longrightarrow$	

La fonction est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = \dots = 0$ donc la fonction h est nulle sur $\mathbb{R}$.

(b) Méthode 2. Je note : $A = \arctan\left(\frac{1}{1+p+p^2}\right)$ et $B = \arctan(p+1) - \arctan(p)$.

Rappel : On sait $\arctan(a)$ est une solution de l'équation $\tan(x) = a$

Ainsi ainsi : $\forall a \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(a)) = a$.

$$> \text{On a } \tan(A) = \frac{1}{1+p+p^2}.$$

$$> \text{De même, on a } \tan(B) = \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{1/(p+1) - 1/p}{1 - \frac{1}{(p+1)p}} = \frac{1}{1+p+p^2}$$

$$\text{Donc } A \text{ et } B \text{ sont solutions de l'équation } \tan(X) = \frac{1}{1+p+p^2}$$

> De plus la fonction Arc-tangente est croissante et impaire, on a donc $0 \leq \arctan(p) \leq \arctan(p+1) < \frac{\pi}{2}$

$$\text{Ainsi } 0 < A < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 < B < \frac{\pi}{2}$$

> Enfin on sait que les solutions de l'équation $\tan(X) = m$ sont de la forme $X \equiv X_0 \pmod{\pi}$.

Donc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $\tan(X) = \frac{1}{1+p+p^2}$ admet une unique solution.

Conclusion : $A = B$

Solution de l'exercice 7 (Énoncé) calcul et simplification de f'

On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}', \quad f'(x) &= \frac{d}{dx}[\arcsin'(x)] + \frac{d}{dx}[\arcsin \sqrt{1-x^2}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left[\sqrt{1-x^2}\right]' \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (-2x) \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 - \frac{x}{|x|}\right] \end{aligned}$$

On discute selon le signe de x .

$$\begin{cases} \text{Si } x \in \mathcal{D}' \text{ et } x > 0, \text{ alors } |x| = +x \text{ et } f'(x) = 0 \\ \text{Si } x \in \mathcal{D}' \text{ et } x < 0, \text{ alors } |x| = -x \text{ et } f'(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \arcsin'(x) \end{cases}$$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. On démontre par récurrence

$$H \langle n \rangle : \mid \text{ Il existe deux entiers } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}.$$

Initialisation

On a $(2 + \sqrt{3})^0 = 1$ je choisis $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

Hérédité Je suppose que $H_{<n>}$ est vrai.

On veut trouver a_{n+1} et b_{n+1} entier tel que $(2 + \sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{3}$

On veut avoir

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^{n+1} &= (2 + \sqrt{3})^n (2 + \sqrt{3}) \\ \text{On utilise } H \langle n \rangle \\ &= (a_n + b_n \sqrt{3}) (2 + \sqrt{3}) \\ &= [2a_n + 3b_n] + \sqrt{3} [a_n + 2b_n] \end{aligned}$$

Je choisis $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ et ce sont bien des entiers!!!

De plus

$$(2 + \sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0$$

$$(2 + \sqrt{3})^1 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a_1 = 2 \text{ et } b_1 = 1$$

2. On sait que $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. On va utiliser l'autre relation de récurrence pour calculer b_n est b_{n+1} en fonction des termes de la suite (a_n)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 3b_n \Rightarrow b_n = \dots \\ &\text{et} \\ a_{n+2} &= 2a_{n+1} + 3b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = \dots \end{aligned}$$

L'égalité $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ devient (après simplification) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$.

3. La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Équation caractéristique.

On doit résoudre $X^2 - 4X + 1 = 0$.

Après calcul, on trouve que : Les racines sont $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$.

On sait d'après la théorie des suites, qu'il existe 2 scalaires λ et μ tq

$$a_n = \lambda (2 + \sqrt{3})^n + \mu (2 - \sqrt{3})^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a sait de plus que

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1 \Rightarrow \lambda + \mu = 1 \\ a_1 &= 2 \Rightarrow \lambda (2 + \sqrt{3}) + \mu (2 - \sqrt{3}) = 2 \end{aligned} \right\} \text{ ainsi } \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

$$\text{Conclusion : } a_n = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3})^n + \frac{1}{2} (2 - \sqrt{3})^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. On fait par récurrence (1 étage) : $H_{<n>} : (a_n)^2 - 3(b_n)^2 = 1$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^n &= a_n + b_n \sqrt{3} \\ \text{Or } a_n, b_n &\text{ sont } > 0 \\ &= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{3(b_n)^2} \\ \text{Or } (a_n)^2 - 3(b_n)^2 &= 1 \\ &= \sqrt{(a_n)^2} + \sqrt{(a_n)^2 - 1} \\ &= \sqrt{N_0} + \sqrt{N_0 - 1} \text{ avec } N_0 = (a_n)^2 \end{aligned}$$