

Programme de colle de la semaine 7

du Lundi 10 Novembre au vendredi 14 Novembre.

Questions de cours.

- > L'ensemble $\mathcal{P}(E)$
 - Définition de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.
 - Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(E)$
 - Soit $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Justifier que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^n
- > Autour de l'injectivité.
 - Donner la définition de l'injectivité.
 - Donner la définition de la fonction f est croissante.
 - Démontrer qu'une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ strictement croissante est injective.
- > Un exemple "original". Plus difficile, il y a la correction en page 2
 - Définition de $x \in \mathbb{Q}$.
 - On a montrer au début de l'année que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
 - Savez vous le démontrer ? Je ne suis pas sûr qu'il faille vérifier.
 - Montrer que la fonction : $f : (a, b) \mapsto a + b\sqrt{2}$ est injective de $\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- > Propriétés de l'injectivité.
 - Signification de $g \circ f$
 - Démontrer que
$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est inj} \\ g \text{ est inj} \end{array} \right\} \implies g \circ f \text{ inj} \quad \text{et} \quad g \circ f \text{ est inj} \implies f \text{ est inj}$$
- > Définition de $\text{im}(f)$ et la surjectivité.
 - Expliquer ce que signifie : "à valeurs dans $\mathcal{A}$ ".
 - Définir l'ensemble $\text{Im}(f)$.
 - Soit la fonction $f : x \mapsto x + 1/x$
 - Donner le tableau de signe/variation de la fonction f et faire son graphe.
 - Expliquer comment on en déduit : inj, surj, bij et $\text{Im}(f)$
- > Propriétés de la surjectivité.
 - Compléter et démontrer que
$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est surj} \\ g \text{ est surj} \end{array} \right\} \implies g \circ f \text{ est surj} \quad \text{et} \quad g \circ f \text{ est surj} \implies g \text{ est surj}$$
- > Bijection et équation. On suppose que la fonction f réalise une bijection de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{A}$
 - Définition de f la fonction f est bijective.
 - Justifier que, pour tout $b \in \mathcal{A}$, l'équation $f(X) = b$ admet une unique solution dans $\mathcal{D}$
 - Application 1 : Justifier que pour tout n , il existe un unique $x \in [0, 1]$ tel que $x^n + x - 1 = 0$
 - Application 2 : Justifier que pour tout n , il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x + \sin(x) = n$
- > Je le fais lundi Bijection réciproque.
 - Définition et les exemples célèbres.
 - Propriété du couple bijection-bijection réciproque.
 - Comment calculer la bijection réciproque.
- > Je le fais lundi Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ une fonction et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ deux fonctions
 - Démontrer que :
$$\left. \begin{array}{l} g \circ f = id_{\mathcal{D}} \\ f \circ g = id_{\mathcal{A}} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \text{Alors la fonction } f \text{ est bijective} \\ \text{et } f^{-1} = g \end{array}$$

Exercices.

Je sais c'est pas très fun. Des calculs autour des bijections/Bijection réciproque

————— Un exemple "original" —————

> Définition de $x \in \mathbb{Q}$.

On a : $x \in \mathbb{Q} \iff$ On peut écrire $x = \pm \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

$\iff$ Il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \pm \frac{a}{b}$

> Démonstration de : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors : n^2 est pair $\implies n$ pair

On fait un RA. On suppose que : n^2 est pair et n n'est pas pair

Comme n est un entier et n n'est pas pair, donc n est impair et on peut écrire : $n = 2k + 1$

Ainsi on $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 1 + 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{Entier}$ est impair

Conclusion : n^2 est pair et n^2 est impair OUPS

> Démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On fait pas un RA

On suppose que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et que a et b ne sont pas tous les deux pairs!!!!

Comme $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies b\sqrt{2} = a \implies 2b^2 = a^2$

Donc a^2 est pair ainsi a pair. Voir ci dessus

On a donc $a = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$

Ainsi $2b^2 = a^2 \implies 2b^2 = (2p)^2 \implies b^2 = 2p^2$

Donc b^2 est pair ainsi b pair.

Conclusion : a et b sont tous les deux pairs OUPS!!!!

> Montrer que la fonction : $f : (a, b) \mapsto a + b\sqrt{2}$ est injective de $\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Rappel : $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \iff a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}$

On suppose que : $f(a, b) = f(a', b')$

On va montrer que $a = a'$ et $b = b'$

On sait que : $f(a, b) = f(a', b')$ signifie $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$.

On va montrer par un RA que $b = b'$.

On suppose que $b \neq b'$.

On a ainsi $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2} \implies \dots \implies \sqrt{2} = \frac{a' - a}{b - b'}$

C'est légitime car $b - b' \neq 0$ donc $\sqrt{2} = \frac{a' - a}{b - b'} \in \mathbb{Q}$ OUPS

Donc $b = b'$

De plus on a maintenant $a + b\sqrt{2} = a' + b\sqrt{2} \implies a = a' + b\sqrt{2} - b\sqrt{2} = a'$

Donc $a = a'$