Nom Lundi 17 Novembre.

Exercice 1. [Correction] On définit les suites (I_n) et (S_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\, dx \quad et \quad S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

1. Étude de la suite (I_n)
   (a) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ 0 \leqslant \tan(x) \leqslant \frac{4}{\pi} x$
   C'est une inégalité classique de convexité, que l'on verra plus tard. Donc faites une étude fonction et pousser jusqu'à h''
   (b) En déduire que : la suite (I_n) converge vers 0.
2. Étude de la suite (S_n)
   (a) Trouver une primitive de $\frac{\square'}{\square}$, de $\square'\square$ et de$\square'\square^{\alpha}$.
   En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{2k+2} + I_{2k} = \frac{1}{2k+1}$
   (b) En déduire par un télescopage que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{2n+2}$
   (c) La suite (S_n) converge-t-elle ?

Exercice Bonus

Exercice 2. [Correction] On suppose $a > 0$.
Calculer $\cos(\arctan a)$ et $\sin(\arctan a)$