Exercice Modèle

Soit f une fonction dérivable vérifiant

$$f(x+y) = f(x)\, f(y) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R} \quad (E)$$

Pour une rédaction propre et claire, on utilisera la phrase : "J'applique l'égalité avec ....."

1. Calculer $f(0)$ et vérifier que la fonction f est positive.
2. On suppose que $f(0) = 0$.
   Montrer que : la fonction f est constante égale à 0.
3. On suppose que $f(0) = 1$. Et on note $\alpha = f'(0)$.
   (a) Montrer que : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \alpha f(t)$
   (b) Résoudre l'équation différentielle
   (c) Déterminer f.

Correction

1. J'applique l'égalité avec $x = 0$ et $y = 0$
   Ainsi on a $f(0) = f(0)\,.f(0) = [f(0)]^2 \iff f(0) - [f(0)]^2 = 0$
   $$\iff f(0)[1 - f(0)] = 0$$
   $$\iff f(0) = 0 \ \text{ ou } \ f(0) = 1$$
   Conclusion : Il y a deux valeurs possibles : $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$
   De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geqslant 0$
   Conclusion : la fonction f est positive.
2. On suppose que $f(0) = 0$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$\boxed{\text{On veut montrer que } f(x) = 0}$$
   J'applique l'égalité avec $x = x$ et $y = 0$
   Ainsi on a $f(x) = f(x)\,.f(0) = f(x)\,.0 = 0$
   Conclusion : la fonction est constante égale à 0.
3. On suppose que $f(0) = 1$. Et on note $\alpha = f'(0)$.
   (a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$. On dérive l'égalité (E), CàD $f(x+y) = f(x)\, f(y)$ par rapport à x
   $$\text{Ainsi on a } \ \frac{d}{dx}[f(x+y)] = \frac{d}{dx}[f(x)\, f(y)]$$
   $$C\text{à}D\ 1f'(x+y) = f'(x)\, f(y)$$
   On a donc l'égalité : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f'(x+y) = f'(x)\, f(y)$
   J'applique l'égalité avec $x = 0$ et $y = t$
   $$\text{Ainsi on a } \quad f'(t) = f'(0)\, f(t) = \alpha f(t)$$
   $$\Longrightarrow\ f'(t) - \alpha f(t) = 0$$
   (b) On résout l'EDL1 $f'(t) - \alpha f(t) = 0$
   $$\text{On trouve que } \forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = Ke^{\alpha t}$$
   (c) On sait que $f(0) = Ke^{\alpha 0} = 1$ donc forcément $K = 1$
   Conclusion : la fonction f et forcément de la forme $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{\alpha x}$

   Pour conclure il faut faire la synthèse : il est facile de vérifier que
   Lorsque $f(x) = e^{\alpha x}$, alors on a bien $f(x+y) = f(x)\,.f(y)$
   Conclusion : les fonctions dérivable vérifiant (E)
   sont $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{\alpha\, t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 1.

Recopier et comprendre l'exercice modèle

En utilisant le vocabulaire et en transposant les méthodes de l'exercice modèle
FAIRE LES 2 EXERCICES SUIVANTS

Exercice 2. [Correction] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall\, x, y \in \,]0, +\infty[\,, \quad f\,(x\,y) = x f\,(y) + y\, f\,(x) \qquad (E)$$

1. Déterminer les/la valeurs possible de $f\,(1)$.
2. On suppose que f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie la relation (E)
   (a) On note $\alpha = f'\,(1)$.
   Démontrer que la fonction f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'EDL1 : $t\,z' - z = \alpha\, t$
   (b) Résoudre cette EDL1 sur $\mathscr{D} = \,]0, +\infty[$
   (c) Déterminer les fonctions f qui sont solutions du problème.
3. On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)
   Déterminer f

Exercice 3. [Correction]

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)} \qquad (E)$$

1. Démontrer que : $\forall\,(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$
   On admet les 3 formules "cousines" $\cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)$
   $\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$
   $\sinh(a-b) = \sinh(a)\cosh(b) - \cosh(a)\sinh(b)$

   En déduire que les fonctions $T_\alpha : x \longmapsto \tanh(\alpha\, x)$ sont des solutions du problème étudié.

On considère dans la suite une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fixée, dérivable, et vérifiant (E).

2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
3. On suppose que $f(0) = 1$
   Démontrer que la fonctions f est constante égale à 1.

   On a admet que de même : si $f(0) = -1$ alors la fonction f est constante égale à -1.

On suppose dans la suite que $f(0) = 0$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
   En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
5. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 1$, montrer qu'alors $f(0) = 1$
   En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1$
   On a admet que de même on peut démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -1$

   On vient de démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1$.
6. Démontrer que : il existe α tel que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \alpha\left[1 - f^2(t)\right]$
7. Avec un DES, déterminer une primitive H de $\dfrac{1}{1 - x^2}$ sur $]-1, 1[$.
8. En déduire une expression de $H \circ f$ puis déterminer f.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall\, x, y \in\,]0, +\infty[\,, \quad f\,(x\,y) = xf\,(y) + y\,f\,(x) \quad (E)$$

1. Déterminer les/la valeurs possible de $f\,(1)$.

   J'applique l'égalité avec $x = y = 1$

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi } f\,(1.1) &= 1.f\,(1) + 1.f\,(1) \\ &\Longrightarrow\ f(1) = 2f(1) \\ &\Longrightarrow\ f(1) = 0 \end{aligned}$$

2. On suppose que f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifie la relation (E)

   (a) On note $\alpha = f'\,(1)$. Démontrer que la fonction f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'EDL1 : $t\,z' - z = \alpha\,t$

   Je dérive l'égalité en x

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi } \frac{d}{dx}\,[f\,(x\,y)] &= \frac{d}{dx}\,[xf\,(y) + y\,f\,(x)\,] \\ &\Longrightarrow\ y\ f'\,(x\,y) = f\,(y) + y\,f'\,(x) \end{aligned}$$

   On applique cette égalité avec $x = 1$ et $y = t$, ainsi

   $$t\ f'\,(t) = f\,(t) + t\,f'\,(1)$$

   On a bien $\forall\, t > 0,\ t\ f'\,(t) - f\,(t) = \alpha t$

   (b) Résoudre cette EDL1 sur $\mathscr{D} =]0, +\infty[$

   Sur $\mathscr{D} =]0, +\infty[$, on résout l'EDL1 complète $tz' - z = \alpha\,t \iff z' - \dfrac{1}{t}z = \alpha$

   $>$ Équation homogène

   comme une primitive de $a(t) = \dfrac{-1}{t}$ est $A(t) = -\ln|t|$,

   On a : $\forall\, t > 0,\ h(t) = K\,e^{-A(t)} = K\,t$ avec $K \in \mathbb{R}$

   $>$ Solution particulière y_p

   On cherche y_p de la forme $y_p(t) = C(t)\,t$

   Comme $ty_p' - y_p = \alpha\,t$, on obtient $C'(t)\,t^2 = \alpha\,y \iff C'(t)\dfrac{\alpha}{t}$

   Je choisis $C(t) = \alpha\ln(t)$. Ainsi $y_p(t) = C(t)\,t = \alpha\,t\ln|t|$ convient

   Conclusion : Les sol sont : $\forall\, t > 0,\ z(t) = \alpha\,t\ln(t) + Kt$ avec $K \in \mathbb{R}$

   (c) Déterminer les fonctions f qui sont solutions du problème.

   Comme les solutions du problème vérifient $f(1) = 0$, on doit avoir $K = 0$

   Donc les solutions du problème sont de la forme $\forall\, t > 0,\ f(t) = \alpha\,t\ln(t)$

   et il est facile de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions du problème

   Conclusion : les solutions du problème sont : $\forall\, t > 0,\ f(t) = \alpha\,t\ln(t)$

3. BONUS : On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)

   Comme f est continue sur $]0, +\infty[$, elle admet , sur $]0,+\infty[$, des primitive $\mathfrak{F}$
   et on note H l'une d'elle

   $>$ Je primitive $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ en la variable x

   Ainsi on a : $\forall\, x, y > 0,\ \dfrac{H(xy)}{y} = \dfrac{x^2}{2}f(y) + xH(y)$

   $>$ J'applique avec $x = 1$ et $y = t$

   ainsi on a $\dfrac{H(t)}{t} = \dfrac{1}{2}f(t) + H(t)$

   $$\Longrightarrow\ \forall\, t > 0,\ f(t) = \frac{2H(t)}{t} - 2H(t)$$

   Conclusion : f s'exprime à l'aide de fonction dérivables
   ainsi f est dérivable et la conclusion Q2c est encore valide.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fixée, dérivable, et satisfaisant (E).

1. Démontrer que : $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$
   En déduire que les fonctions $T_\alpha : x \longmapsto \tanh(\alpha\, x)$ sont des solutions du problème étudié.

On considère dans la suite une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fixée, dérivable, et vérifiant (E).

2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

   On applique avec $x = 0$ et $y = 0$,

   $$\text{ainsi on a } f(0+0) = \frac{2f(0)}{1+f(0)^2}$$
   $$\iff f(0)\left(1+f(0)^2\right) - 2f(0) = 0$$
   $$\iff f(0)\left(f(0)^2 - 1\right) = 0$$
   $$a \iff f(0)\,(f(0)-1)\,(f(0)+1) = 0$$

   Conclusion $f(0)$ égale à 0,1 ou -1.

3. On suppose que $f(0) = 1$. Démontrer que la fonctions f est constante égale à 1.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, j'applique avec $x = t$ et $y = 0$, ainsi $f(x) = \dfrac{f(x)+1}{1+f(x).1} = \dfrac{\square}{\square} = 1$

   Conclusion : La fonction f est constante égale à 1.

$\boxed{\text{On suppose dans la suite que } f(0) = 0.}$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a

   $$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2} = \frac{2\gamma}{1+\gamma^2} \quad \textit{avec } \gamma = \frac{x}{2}$$

   En déduire que : $\forall\,x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   On a maintenant : $1 - f(x) = 1 - \dfrac{2\gamma}{1+\gamma^2} = \dfrac{1+\gamma^2-2\gamma}{1+\gamma^2} = \dfrac{(1-\gamma)^2}{1+\gamma^2} \geqslant 0$

   $$f(x) + 1 = \cdots = \frac{(1+\gamma)^2}{1+\gamma^2} \geqslant 0$$

   $\boxed{\text{Conclusion : } \forall\,x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \left[-1,1\right].}$

5. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 1$, Montrer qu'alors $f(0) = 1$. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1$

   J'applique avec $x = a$ et $y = -a$, ainsi $f(0) = \dfrac{1+f(-a)}{1+1.f(-a)} = \dfrac{\square}{\square} = 1$

   Oups!!! Conclusion : l'info "il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 1$" est FAUSSE

   Sa négation, CàD $\forall\,x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1$ est VRAIE

6. Montrer qu'alors $f(0) = 1$. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 1$

   On dérive la relation par rapport à 'x', ainsi on a $\dfrac{d}{dx}\left[f(x+y)\right] = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}\right]$

   $$\forall\,x,y$$

   $$quad1.f'(x+y) = \frac{f'(x)\left[1+f(x)f(y)\right] - \left[f(x)+f(y)\right]f'(x)f(y)}{\left[1+f(x)f(y)\right]^2}$$
   $$= \frac{f'(x) - f(y)f'(x)f(y)}{\left[1+f(x)f(y)\right]^2}$$
   $$= \frac{f'(x)\left[1-f(y)f(y)\right]}{\left[1+f(x)f(y)\right]^2}$$

   J'applique avec $x = 0$ et $y = t$, ainsi

   $$f'(t) = \frac{f'(0)\left[1-f(t)f(t)\right]}{\left[1+f(0)f(t)\right]^2} = \alpha\left[1-f^2(t)\right] \quad \textit{avec } \alpha = f'(0)$$

Démontrer que : il existe α tel que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \alpha\left[1 - f^2(t)\right]$

7. Avec un DES, déterminer une primitive H de $\dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.

   On trouver $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1/2}{x+1} - \dfrac{1/2}{x-1}$

   Ainsi une primitive H de $\dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$,

   c'est $H(x) = \dfrac{1}{2}\ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\ln|x-1| = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

8. En déduire une expression de $H \circ f$ puis déterminer f.

   $>$ Comme $\dfrac{1}{1-x^2} \rightsquigarrow H(x)$, on a $\dfrac{u'}{1-u^2} \rightsquigarrow H(u)$

   $>$ On a maintenant $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \alpha\left[1 - f^2(t)\right] \iff \dfrac{f'(t)}{1-f^2(t)} = \alpha$ c'est légitime car $f(x) \in \Big[-1,1\Big]$

   On primitive cette égalité, ainsi $\forall\, t \in \mathbb{R},\ H\left(f(x)\right) = \alpha x + K$

   Comme $H(0) = 0$ on a forcément $K = 0$

   Conclusion : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ H\Big(f(x)\Big) = \alpha x$

   $>$ On a maintenant $H\left(f(x)\right) = \alpha x \iff \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) = \alpha x$

   $$\iff$$

   $$\iff f(x) = \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2\alpha x} + 1} = T_\alpha(x)$$

Conclusion : Les fonctions f de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$, dérivable et vérifiant (E) sont

- $>$ La fonction constante égale à 1
- $>$ La fonction constante égale à -1
- $>$ Les fonction $T_\alpha : x \longmapsto \tanh(\alpha x)$