

Exercice 1. [Correction]

- Étude de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} dt$
 - Déterminer un réel K tel que : $\forall t \in [0, \pi/3], \sin(t) \leq K < 1$
 - En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3} K^n$
 - Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- On va maintenant étudier de la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
 - Démontrer que la suite (S_n) est majorée,
CàD Déterminer une constante M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq M$
 - En déduire que la suite (S_n) converge. On note S sa limite.

Exercice 2. [Correction] Approximation de $\arctan(a)$

Soit $a \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$s_n(a) = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

- Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}$
- En déduire que : $s_n(a) - \arctan(a) = (-1)^n \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt$
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt \leq \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$
- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |s_n(a) - \arctan(a)| \leq \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$
- La suite $(s_n(a))$ converge-t-elle ?

Exercice 3. [Correction] On définit les suites (I_n) et (S_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx \quad \text{et} \quad S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- Étude de la suite (I_n)
 - Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], 0 \leq \tan(x) \leq \frac{4}{\pi}x$
 - En déduire que : la suite (I_n) converge vers 0.
- Étude de la suite (S_n)
 - Trouver une primitive de $\square' \square^\alpha$.
En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, I_{2k+2} + I_{2k} = \frac{1}{2k+1}$
 - En déduire par un télescopage que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{2n+2}$
 - La suite (S_n) converge-t-elle ?

Exercice 4. [Correction] On suppose $a > 0$. Calculer $\cos(\arctan a)$ et $\sin(\arctan a)$

Exercice 5. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on considère Q_n définie par

$$\forall n \in \mathbb{C}, Q_n(z) = \frac{1}{2i} \left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} \right]$$

(a) Un peu de calcul

i. Justifier que Q_n est un polynôme de degré $2n$, déterminer son coefficient dominant.

Calculer le coefficient de X^{2n-2}

ii. Est ce que 0 est une racine du polynôme Q_n ?

iii. Vérifier que le polynôme $Q_n(z)$ est pair, CàD $\forall n \in \mathbb{C}, Q_n(-z) = Q_n(z)$

iv. Montrer que : $Q_n(z) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} [\dots] = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p z^{2n-2p}$

(b) Factorisation de Q_n .

i. À l'aide des racines $(2n+1)$ -ième de l'unité, déterminer les racines $r_1, r_2, \dots, r_{2n}$ de Q_n

Remarque/Rappel : le nombre de racine est égale au degré

puis exprimer les racines $r_1, r_2, \dots$ à l'aide de la fonction Tangente.

ii. En utilisant la périodicité de la fonction Tangente, justifier que $r_{n+1} = -r_n$.

On admettra les autres égalités, CàD $r_{n+2} = -r_{n-1}, \dots$

En déduire que :

$$Q_n(X) = (2n+1) \left(X^2 - (r_1)^2 \right) \dots \left(X^2 - (r_n)^2 \right) \quad \text{avec } r_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

(c) En regardant le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Q_n ,

$$\text{montrer que : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

2. Une limite très classique.

(a) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin x \leq x \leq \tan x$.

$$\text{En déduire que : } \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\tan^2(x)} + 1.$$

(b) On pose pour $n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

i. A l'aide de l'encadrement précédent et de la question Q1c, construire un encadrement pour S_n .

ii. En déduire que : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$. *Ce résultat a été démontré par Euler en 1735*

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Étude de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} dt$

(a) Déterminer un réel K tel que : $\forall t \in [0, \pi/3], \sin(t) \leq K < 1$

On a

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{La fonction Sinus est croissante sur } [0, \pi/3] \end{array} \right\} \implies \sin(0) \leq \sin(t) \leq \sin \pi/3$$

Conclusion : Je choisis $K = \sin \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ qui convient

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3} K^n$

$$> \forall t \in [0, \pi/3], \text{ on a } 0 \leq \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} \leq \frac{K^n}{\cos(t)} \leq \frac{K^n}{1/2} \quad \text{car } \forall t \in [0, \pi/3], \cos(t) \geq \cos \pi/3 = 1/2$$

> On intègre l'inégalité de $t = 0$ à $t = \pi/3$

(c) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

C'est le théorème des 2 gendarmes

2. On va maintenant étudier de la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

(a) Démontrer que la suite (S_n) est majorée, CàD Déterminer une constante M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq M$

On somme l'inégalité Q1b de $k = 0$ à $k = n$, ainsi

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \frac{2\pi}{3} K^k \\ &= \frac{2\pi}{3} \frac{1 - K^{n+1}}{1 - K} \\ &\leq \frac{2\pi}{3} \frac{1 - \mathcal{O}}{1 - K} \end{aligned}$$

Ainsi la suite (S_n) est majorée par $M = \frac{2\pi}{3} \frac{1 - \mathcal{O}}{1 - K}$

(b) En déduire que la suite (S_n) converge. On note S sa limite.

$$\text{On a } S_{n+1} - S_n = \left(\sum_{k=0}^{n+1} u_k \right) - \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) = \underbrace{u_{n+1}}_{k=n+1}$$

$$\text{et } u_{n+1} = \int_0^{\pi/3} \underbrace{\frac{\sin^{n+1}(t)}{\cos(t)}}_{\geq 0 \text{ sur } [---]} dt \geq 0$$

Conclusion : La suite (S_n) est croissante et majorée par M

Donc la suite converge vers $\ell \leq M$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^n (-t^2)^k = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}$$

2. En déduire que : $s_n(a) - \arctan(a) = (-1)^n \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$

On intègre l'égalité précédente sur $[0, a]$

$$\text{Ainsi } \int_0^a \text{Gauche } dt = \int_0^a \text{Droite } dt$$

$$\int_0^a \text{Gauche } dt = \dots = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{2n+1} = S_n(a)$$

$$\int_0^a \text{Droite } dt = \dots = \arctan(a) + (-1)^n \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

$$\text{Ainsi on a } S_n(a) = \arctan(a) + (-1)^n \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

On ré-organise et c'est Yes!

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

$$\text{On a : } \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+0} dt = [Primitive]_0^a = \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$$

4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| s_n(a) - \arctan(a) \right| \leq \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

On a

$$|s_n(a) - \arctan(a)| = \left| \int_0^a \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt \right|$$

Inégalité triangulaire

$$\leq \int_0^a \left| \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \right| dt$$

On simplifie les V.A.

$$\leq \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

On utilise la question précédente

$$\leq \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$$

5. La suite $(s_n(a))$ converge-t-elle?

Avec le théorème de la distance, on conclut : La suite $(s_n(a))$ converge vers $\arctan(a)$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Étude de la suite (I_n)

(a) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], 0 \leq \tan(x) \leq \frac{4}{\pi}x$

On étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, la fonction $h : x \mapsto \frac{4}{\pi}x - \tan(x)$

> La fonction h est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

> $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], h'(x) = \frac{4}{\pi} - (1 + \tan^2(x))$

$$h''(x) = 0 - (1 + \tan^2(x)) \cdot 2 \tan(x) \geq 0 \quad \text{sur } \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

> D'où le tableau

x	0	α	$\frac{\pi}{4}$
$\text{sgn } h''$		—	—
h'	$\frac{4}{\pi} - 1 > 0$	0	$\frac{4}{\pi} - 2 < 0$
$\text{sgn } h'$	+	0	—
h	0		0

Rappel : $\frac{4}{\pi} \approx \frac{3.14}{3}$ donc $1 < \frac{4}{\pi} < 2$

(b) En déduire que : la suite (I_n) converge vers 0.

> Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], 0 \leq \tan^n(x) \leq \frac{4^n}{\pi^n}x^n$

> On intègre l'encadrement de $t = 0$ à $t = \pi/4$

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi on a } 0 \leq I_n &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4^n}{\pi^n} x^n dx \\
 &\leq \frac{4^n}{\pi^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &\leq \frac{4^n}{\pi^n} \frac{\pi^{n+1}}{4^{n+1}} \frac{1}{n+1} \\
 &\leq \frac{4}{\pi} \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

Conclusion : Le théorème des 2 gendarmes assure que la suite (I_n) converge vers 0

2. Étude de la suite (S_n)

(a) Trouver une primitive de $\square' \square^\alpha$.

On a facilement $\square' \square^\alpha \rightsquigarrow \frac{\square^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, I_{2k+2} + I_{2k} = \frac{1}{2k+1}$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ on a } I_{2k+2} + I_{2k} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+2}(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k}(x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k}(x) [\tan^2(x) + 1] dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \square^{2k} \square' dx \\
 &= \left[\frac{\square^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \left[\frac{\tan^{2k+1}(x)}{2k+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{1}{2k+1}
 \end{aligned}$$

(b) En déduire par un télescopage que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{2n+2}$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \underbrace{[I_{2k+2} + I_{2k}]} \\
 &= \underbrace{[I_2 + I_0]}_{k=0} + \underbrace{\ominus [I_4 + I_2]}_{k=1} + \cdots + \underbrace{(-1)^n [I_{2n+2} + I_{2n}]}_{k=n} \\
 &\quad \text{\textit{Télescopage}} \\
 &= I_0 + (-1)^n I_{2n+2} \\
 &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_{2n+2} \quad \text{\textit{car } } I_0 = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

(c) La suite (S_n) converge-t-elle ?

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+2} = 0$

Conclusion : La suite (S_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$, CàD $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

Pour simplifier $\arctan a$, il faut utiliser $\tan(\arctan a) = a$

On suppose $a > 0$. Calculer $\cos(\arctan a)$

De plus on sait que : $C^2 + S^2 = 1$ donc $C^2 + T^2 C^2 = 1$

ainsi $C = \pm \sqrt{\frac{1}{1+T^2}}$ Et le signe $\pm$ est à déterminer avec le contexte

$$\text{On a } \cos(\arctan a) = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2(\arctan a)}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}}$$

De plus ICI $\arctan a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Donc $\cos(\arctan a) > 0$ donc c'est $\oplus$

$$= \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}}$$

Conclusion : pour tout a , on a $\cos(\arctan a) = \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}}$

Rq On n'a pas eu besoin de l'info $a > 0$

On suppose $a > 0$. Calculer $\sin(\arctan a)$

De plus on sait que : $C^2 + S^2 = 1$ donc $\frac{S^2}{T^2} + S^2 = 1$

ainsi $S = \pm \sqrt{\frac{T^2}{1+T^2}}$ Et le signe $\pm$ est à déterminer avec le contexte

$$\text{On a } \sin(\arctan a) = \pm \sqrt{\frac{\tan^2(\arctan a)}{1 + \tan^2(\arctan a)}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{a^2}{1 + a^2}}$$

De plus ICI $a > 0$ donc $\arctan a \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

Donc $\sin(\arctan a) > 0$ donc c'est $\oplus$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{1 + a^2}}$$

Conclusion : Si/Lorsque $a > 0$, $\sin(\arctan a) = \sqrt{\frac{a^2}{1 + a^2}}$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

$$1. \text{ On a } Q_n(0) = \frac{1}{2i} [(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}] = \frac{1}{2i} [2(i)^{2n+1}] = \frac{1}{i} [i(i^2)^n] = (-1)^n \neq 0.$$

Donc 0 n'est pas une racine de Q_n .

$$2. \text{ On a } Q_n(-X) = \dots = Q_n(X) \text{ donc le polynôme } Q_n \text{ est pair.}$$

3. Avec le binôme on a

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \frac{1}{2i} [(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (i)^k (z)^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-i)^k (z)^{2n+1-k} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (z)^{2n+1-k} (i)^k \underbrace{[1 - (-1)^k]}_{= \begin{matrix} \text{à } 0 \text{ ou } 2 \text{ selon parités} \end{matrix}} \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0, k \text{ impair}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (z)^{2n+1-k} (i)^k 2 \\ &\quad \text{On ré-indexe avec } k = 2p + 1. \text{ C'est possible car } k \text{ est impair} \\ &= \frac{1}{i} \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (z)^{2n+1-(2p+1)} \underbrace{(i)^{2p+1}}_{= i(-1)^p} \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p z^{2n-2p} \end{aligned}$$

Ainsi

$$> \text{ Sur le plateau } p = 0, \text{ on lit coefficient de } z^{2n}, \text{ c'est } a_{2n} = \binom{2n+1}{1} = 2n+1$$

$$> \text{ Sur le plateau } p = 1, \text{ on lit coefficient de } z^{2n-2}, \text{ c'est } a_{2n} = -\binom{2n+1}{3} = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$$

$$4. \text{ On résout l'équation } Q_n(z) = 0.$$

$$\begin{aligned} Q_n(z) = 0 &\iff (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0 \\ &\iff \left\{ \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^{2n+1} = 1 \right. \\ &\iff \begin{cases} U^{2n+1} = 1 & (A) \\ \text{et} \\ \frac{z+i}{z-i} = U & (B) \end{cases} \end{aligned}$$

> Résolution de (A).

Les solutions sont les racines $(2n+1)$ -ième de l'unité,

$$\text{CàD } \omega_k = \exp\left(i k \frac{2\pi}{2n+1}\right) \text{ avec } k \in \{0, \dots, 2n\}$$

> Résolution de (B).

$$\text{On a } \frac{z+i}{z-i} = U_k \iff z+i = \omega_k(z-i)$$

$$\iff z(1-\omega_k) = -i(1+\omega_k)$$

Situation $\omega_0 = 1$

Dans cette situation,

l'équation n'a pas de solution en z .

Situation $\omega_1, \dots, \omega_{2n} \neq 1$

$$\text{On a } z = r_k = \frac{-i(1+\omega_k)}{1-\omega_k} \text{ avec } k \in \{1, \dots, 2n\}$$

Conclusion : On a $2n$ racines $r_k = \frac{-i(1+\omega_k)}{1-\omega_k}$ avec $k \in \{1, \dots, 2n\}$

De plus pour tout $k \in \{1, \dots, 2n\}$, on a

$$\begin{aligned} r_k &= \frac{-i(1 + \omega_k)}{(1 - \omega_k)} = \frac{-i(1 + \exp(\frac{2ik\pi}{2n+1}))}{1 - \exp(\frac{2ik\pi}{2n+1})} \\ &= \text{Argument Moitié} = \frac{\cos \frac{k\pi}{2n+1}}{\sin \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\tan \frac{k\pi}{2n+1}} \end{aligned}$$

5. On remarque que $r_{n+1} = -r_n$, $r_{n+2} = -r_{n-1} \dots$ etc ... on le justifie en utilisant la π -périodicité et l'impairité de $\tan$.
On a maintenant

$$\begin{aligned} Q_n(X) &= (2n+1)(X-r_1)(X-r_2)\dots(X-r_n)(X+r_1)(X+r_2)\dots(X+r_n) \\ &= (2n+1)(X-r_1)(X+r_1)\dots(X-r_n)(X+r_n) \\ &= (2n+1)(X^2-(r_1)^2)(X^2-(r_2)^2)\dots(X^2-(r_n)^2) \end{aligned}$$

6. Le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Q est égale à

$$> \text{D'une part avec la question Q2a., il est égale à : } -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$$

$$> \text{D'autre part avec la factorisation de la question Q5, il est égale à : } (2n+1)[-r_1^2 - \dots - r_n^2]$$

$$\text{Conclusion : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2(\frac{k\pi}{2n+1})} = r_1^2 + \dots + r_n^2 = \frac{(2n+1)n(2n-1)}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

7. (a) Convexité.

(b) On sait que : $0 < a < b < c \implies 0 < a^2 < b^2 < c^2$, ainsi

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, 0 < \sin x \leq x \leq \tan x \\ \implies 0 < \sin^2 x \leq x^2 \leq \tan^2 x \\ \implies 0 < \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \\ \implies 0 < \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} \\ \implies 0 < \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < 1 + \frac{1}{\tan^2 x} \end{aligned}$$

(c) Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, alors $0 < \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$. On applique donc d'après l'inégalité précédente avec $\frac{k\pi}{2n+1}$

$$\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leq \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1$$

On somme l'encadrement précédent de $k=1$ à $k=n$ et on utilise $\sum_{k=1}^n \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$, ainsi

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 S_n \leq \frac{n(2n-1)}{3} + n$$

- (d) On isole S_n puis utilise le théorème d'encadrement.