TD 9 Bijection.

Mercredi 19 Novembre 2025.

Exercice 1. [Correction] Soit $\tanh : x \longmapsto \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Montrer que la fonction $\tanh$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.

Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2. La fonction W de Lambert

Dans tout le sujet, on note $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array} \right.$.

On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

1. La fonction W.
   (a) Justifier que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $\left[-e^{-1}, +\infty\right[$.
   Dans toute la suite du sujet, on note W sa bijection réciproque.
   (b) Propriétés de la fonction W
   Propriétés élémentaires : $W(x) = \left| def \right.$ et la fonction W réalise une Bij de ... sur ... et la monotonie et la parité.
   Calculer $W(0)$ et $W(e)$.
   Faire sur un même dessin les graphes des fonctions f est W.
   (c) Justifier la grande propriété de la fonction W
   $$\text{CàD } \forall x \in \texttt{à préciser},\ W(x)\, e^{W(x)} = x$$
   (d) Donner les ensemble $\mathscr{D}$ de définition/continuité et $\mathscr{D}'$ de dérivabilité de la fonction W
   et Justifier (en utilisant Q1c) que : $\forall x \in \mathscr{D}' \text{ et } x \neq 0,\ W'(x) = \dfrac{W(x)}{x\Big(1 + W(x)\Big)}$
   (e) On va démontrer que : $\dfrac{W(x)}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$.
      i. Justifier que pour tout $x > 0, W(x) = \ln(x) - \ln(W(x))$.
      ii. En déduire que : pour tout $x > e,\ 0 \leqslant \ln(W(x)) \leqslant \ln(\ln(x))$.
      iii. Déduire des deux question précédente un encadrement de $\dfrac{W(x)}{\ln(x)}$ et conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{W(x)}{\ln(x)} = 1$.
2. La fonction V
   (a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur $\left[-e^{-1}, 0\right[$.
   Dans toute la suite du sujet, on note V sa bijection réciproque.
   (b) Propriétés de la fonction V
   Propriétés élémentaires : $V(x) = \cdots$, Bij de ... sur ..., monotonie, parité.
   Faire sur un même dessin les graphes des fonctions f est V.
3. Les équations $f(x) = \beta \iff x\,e^x = \beta$
   Faites le graphe de la fonction f
   Discuter selon les valeurs $\beta \in \mathbb{R}$ le nombre de solution de l'équation $f(X) = \beta$
   et exprimer les solutions à l'aide des fonctions W et V
4. Application d'une autre équation
   On considère a et b deux réels non nuls, et $c \in \mathbb{R}$.
   On s'intéresse à l'équation (E) : $ae^x + bx = c$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $ae^x + bx = c \iff \left(-x + \dfrac{c}{b}\right) e^{-x + \frac{c}{b}} = \dfrac{a}{b} e^{\frac{c}{b}}$.
   En déduire comment on pourrait résoudre l'équation (E)
5. Application d'une autre-autre équation
   Soit $x > 0$. Justifier qu'il existe un unique réel $z \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{-z}$.
   En déduire, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, comment on pourrait résoudre l'équation l'équation $\dfrac{x}{\ln(x)} = \lambda$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.

—— Bijection sans trop de calcul. ——

Exercice 3. [Correction] Soit f, g, h trois fonctions composables.

On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des fonctions bijectives.

1. Justifier sans calcul que g est bijective. On notera g^{-1} la bijection réciproque.
2. Exprimer f à l'aide de deux fonctions bijectives. `(Rq on sait que les fonction` $g \circ f$ `et` $h \circ g$ `et` g `et` g^{-1} `sont bijectives)`

   Ainsi f est bijective.
3. Montrer que h est bijective.
4. Généralisation : Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : F \to E$ trois fonctions.

   On suppose que : $f \circ h \circ g$ est une fonctions surjective et que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont des fonctions injectives.

   Montrer que f, g et h sont bijectives.

—— Exercice plus difficile. ——

Exercice 4. Lire l'exo et passer si c'est trop bizarre.

On considère les opérateurs R et S, définie par pour toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose

> $R(f) = f(x+1)$, CàD $R(f)$ c'est la fonction $x \longmapsto f(x+1)$.

> $S(f) = f(x-1)$, CàD $S(f)$ c'est la fonction $x \longmapsto f(x-1)$.

1. Calculer l'image du polynôme $X^2 + X + 1$, CàD calculer $R(X^2 + X + 1)$
2. Montrer que : $R \circ S = id$ et $S \circ R = id$

Conclusion : R réalise une bijection de ...... sur ...... et S est sa bij réciproque.

Exercice 5. [Correction] Soient f, g deux fonction de E à valeurs dans E.

On suppose que :

> $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$

> f est injective.

1. Justifier que : g est injective
2. Montrer que : $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g = f$.

   En déduire que $\forall\, e \in E,\ [g \circ f \circ g \circ f \circ g](e) = e$.
3. En déduire que g et f sont bijectives.

Exercice 6. On considère A et B deux parties non vides d'un ensemble E.

On considère la fonction f de $\mathscr{P}(E)$ à valeurs dans $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ définie par

$$\forall\, X \in \mathscr{P}(E), \quad f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Calculer $f(E),\ f(A),\ f(B),\ et\ f(\varnothing)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
4. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1} la bijection réciproque.