

Exercice 1. [Correction] La fonction W de Lambert

Dans tout le sujet, on note $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto xe^x \end{cases}$.

On admet que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

1. La fonction W .

(a) Justifier que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

Dans toute la suite du sujet, on note W sa bijection réciproque.

(b) Propriétés de la fonction W

Propriétés élémentaires : $W(b) = \dots$, Bij de ... sur ..., monotonie, parité.

Calculer $W(0)$ et $W(e)$.

Faire sur un même dessin les graphes des fonctions f et W .

(c) Justifier la grande propriété de la fonction W

$$\text{CàD } \forall x \in \mathbb{R} \text{ à préciser, } W(x)e^{W(x)} = x$$

(d) Donner les ensemble $\mathcal{D}$ de définition/continuité et $\mathcal{D}'$ de dérivabilité de la fonction W

$$\text{et Justifier (en utilisant Q1c) que : } \forall x \in \mathcal{D}' \text{ et } x \neq 0, W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

(e) On va démontrer que : $\frac{W(x)}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$

i. Justifier que pour tout $x > 0$, $W(x) = \ln(x) - \ln(W(x))$.

ii. En déduire que : pour tout $x > e$, $0 \leq \ln(W(x)) \leq \ln(\ln(x))$.

iii. Déduire des deux question précédente un encadrement de $\frac{W(x)}{\ln(x)}$ et conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{W(x)}{\ln(x)} = 1$.

2. La fonction V

(a) Montrer que f réalise une bijection de $] -\infty, -1]$ sur $[-e^{-1}, 0[$.

Dans toute la suite du sujet, on note V sa bijection réciproque.

(b) Propriétés de la fonction V

Propriétés élémentaires : $V(x) = \dots$, Bij de ... sur ..., monotonie, parité.

Faire sur un même dessin les graphes des fonctions f et V .

3. Les équations $f(x) = \beta \iff xe^x = \beta$

Faites le graphe de la fonction f

Discuter selon les valeurs $\beta \in \mathbb{R}$ le nombre de solution de l'équation $f(X) = \beta$

et exprimer les solutions à l'aide des fonctions W et V

4. Application d'une autre équation

On considère a et b deux réels non nuls, et $c \in \mathbb{R}$.

On s'intéresse à l'équation $(E) : ae^x + bx = c$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Montrer que : } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } ae^x + bx = c \iff \left(-x + \frac{c}{b}\right)e^{-x + \frac{c}{b}} = \frac{a}{b}e^{\frac{c}{b}}.$$

En déduire comment on pourrait résoudre l'équation (E)

5. Application d'une autre équation

Soit $x > 0$. Justifier qu'il existe un unique réel $z \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{-z}$.

En déduire, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, comment on pourrait résoudre l'équation l'équation $\frac{x}{\ln(x)} = \lambda$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Exercices plus difficiles et donc facultatifs

Exercice 2. On considère les opérateurs R et S , définie : par pour toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$R(f) : x \longmapsto f(x+1) \text{ et } S(f) : x \longmapsto f(x-1).$$

1. Calculer l'image du polynôme $X^2 + X + 1$, CàD calculer $R(X^2 + X + 1)$
2. Montrer que : $R \circ S = id$ et $S \circ R = id$

Conclusion : R réalise une bijection de sur et S est sa bij réciproque.

Exercice 3. [Correction] Soient f, g deux fonction de E à valeurs dans E .

On suppose que :

$$f \circ g \circ f = g \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = f$$

f est injective.

1. Justifier que : g est injective
2. Montrer que : $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g = f$.
En déduire que $\forall e \in E, [g \circ f \circ g \circ f \circ g](e) = e$.
3. En déduire que g et f sont bijectives.

Exercice 4. On considère A et B deux parties non vides d'un ensemble E .

On considère la fonction f de $\mathcal{P}(E)$ à valeurs dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Calculer $f(E)$, $f(A)$, $f(B)$, et $f(\emptyset)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
4. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1} la bijection réciproque.