Programme de colle de la semaine 9

du Lundi 24 Novembre au vendredi 28 Novembre.

Récitation Les réponses mathématiques se font avec plus ou moins 10 verbes

> On suppose... ;On veut montrer .....
> Général $\Longrightarrow$ Particulier : On applique ... ; On dérive ... ; On intègre/primitive/somme ... ; On ordredegrandeur ....
> On résout ....
> On choisit ...

Questions de cours.

> Relation et classe d'équivalence.

Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathscr{R}$ par : $x\mathscr{R}y \iff x\,e^y = y\,e^x$.

Vérifier que la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

On suppose $\mathscr{C}\ell(a) \cap \mathscr{C}\ell(b) \neq \varnothing$. Montrer que : $\mathscr{C}\ell(a) = \mathscr{C}\ell(b)$.

> $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Donner la définition de $x \in \mathbb{Q}$

Démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ en utilisant l'unicité de la factorisation en produit de nombre premier.

> Valeur Absolue.

Définition(s) de $|x|$.

Énoncer le TAF

Application : Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\arctan(x)\right| \leqslant |x|$.

$$\textit{Bonus}\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ \left|\tan(x)\right| \leqslant 2|x|$$

> Partie entière

Définition de $\lfloor x \rfloor$

Montrer que : $4n+1 \leqslant \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 < 4n+2$ `avec G-p et une quantité conjuguée`

En déduire $\left\lfloor \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor$

> Partie entière.

Définition et Propriétés de $\lfloor x \rfloor$, la partie entière de x.

Démonstration de :

p, le nombre de chiffre de n dans l'écriture décimale, est égale à $\left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} + 1 \right\rfloor$.

Application : déterminer (à la main) le nombre de chiffre de $2^{2^5}+1 = 2^{32}+1$ dans l'écriture décimale. rappel : $ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(10) \approx 2,3$

> Densité

Rappel : $\pi = 3,14,1592653....$ Démontrer qu'il existe une suite (u_n) avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Q}$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$

On attend l'explication intuitive avec la suite $u_0 = 3,\ u_1 = 3,1,\ u_2 = 3,14,...,u_6 = 3,141596,....$

Puis l'expression de u_n avec $\lfloor\ \ \rfloor$ et la démonstration de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$

Définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

> Très difficile sans indication mais "faisable" avec les indications.

Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que : $\dfrac{(k-1)k}{2} \leqslant n < \dfrac{k(k+1)}{2}$

Justifier que la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{x(x-1)}{2}$ réalise une bijection (croissante) de ... sur ....

Explicité h^{-1} la bijection réciproque. *On trouver* $h^{-1}(t) = \dfrac{1+\sqrt{8t-7}}{2}$

Montrer que : $k = \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$

> Développement décimal. *Je ne l'ai pas fait mais Kulturelement c'est bien de voir le résultat*

Démontrer que : l'écriture décimal de x est périodique Ssi $x \in \mathbb{Q}$.

faire $\Longrightarrow$ sur l'exemple : On suppose que $x = 3,14195\underbrace{195}\underbrace{195}....$, CàD justifier que $x \in \mathbb{Q}$

Faire $\Longleftarrow$ sur l'exemple $3/7$, CàD justifier que le développement décimal de $3/7$ est périodique **sans le calculer explicitement**

Exercices.

Des suites, des suites. Je commence le cours lundi/mardi avec des généralités et les suites $u_{n+1} = f(u_n)$