

Les ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.**1 Les ensembles de nombre.**

1 Les ensembles de nombre.	1
1.1 Les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.	1
1.2 L'ensemble $\mathbb{Q}$.	2
1.3 $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$	2

2 Propriétés de $\mathbb{R}$

2 Propriétés de $\mathbb{R}$	3
2.1 Valeurs Absolues.	3
2.2 Partie entière.	4
2.3 Majorant, minorant, max, min, sup, inf.	5
2.4 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$	7
2.5 Les intervalles de $\mathbb{R}$.	8

1 Les ensembles de nombre.**1.1 Les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.****L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers.**

> L'ensemble $\mathcal{P}$ est infini et on a

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots, 41, \dots, 641, \dots, 2017, \dots\}$$

> Les nombres premiers permettent de factoriser les entiers.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

> Écriture décimale .

L'écriture décimale de 2017 signifie : $2017 = 7 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3$.

Écriture décimale des entiers Soit $n \in \mathbb{N}$.

Il existe $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_p \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tel que

$$n = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + \underbrace{a_p}_{\neq 0} \cdot 10^p = \sum_{k=0}^p a_k \cdot 10^k$$

Le nombre $p + 1$ c'est le nombre de chiffre dans l'écriture décimale.

> Factorisation en nombre premier.

On peut factoriser de façon unique les entiers en produit de nombre premier.

$$\text{Par exemple : } 2016 = 2^5 3^2 7, \quad 2017 = 2017^1, \quad 2018 = 2^1 1009^1$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

> un entier relatif est un entier naturel signé, CàD un entier naturel avec un signe.

Ainsi

$$p \in \mathbb{Z} \iff \text{Il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } p = \pm n$$

1.2 L'ensemble $\mathbb{Q}$.

> Une fraction est un quotient signé de 2 entiers naturels.

Ainsi on a

$$r \in \mathbb{Q} \text{ on peut écrire } r = \pm a/b \text{ avec } a, b \in \mathbb{N}$$

On sait que : L'écriture des rationnelles n'est pas unique; chacun sait que $2/3 = 4/6$, cependant

Les rationnels s'écrivent de façon unique en *fraction irréductible*, CàD comme quotient signé d'entier premier entre eux, CàD

$$r \in \mathbb{Q} \iff \text{Il existe un unique couple } (a, b) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } \begin{cases} r = \pm a/b \\ \text{et } a \text{ et } b \text{ n'ont pas de facteur premier commun.} \end{cases}$$

Théorème 1.

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel, CàD $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration : On fait un RA. On suppose donc que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, CàD il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

On cherche OUPS!

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \\ \implies b\sqrt{2} &= a \\ \implies b^2 2 &= a^2 \end{aligned}$$

Comme $a, b \in \mathbb{N}$, on sait que a et b se factorise en produit de facteur premier,

ainsi on a $a = 2^\alpha \times (\text{les autres facteurs premiers impairs})$ et $b = 2^\beta \times (\text{les autres facteurs premiers impairs})$

L'égalité $b^2 2 = a^2$, devient

$$2^{2\beta} \times (\text{d'autres facteurs premiers impairs}) \cdot 2 = 2^{2\alpha} \times (\text{d'autres facteurs premiers impairs})$$

OUPS : Multiplicité de 2 = $\underbrace{2\beta + 1}_{\text{à Gauche}} = \text{impaire}$ ET Multiplicité de 2 = $\underbrace{2\alpha}_{\text{à Droite}} = \text{paire}$

1.3 $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 2. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$.

$$x \in \mathbb{R} \iff x = 314, 1592653.....$$

L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$.

On dit que $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite achevée, complétée, CàD

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

2 Propriétés de $\mathbb{R}$

2.1 Valeurs Absolues.

Définition 3. Définition de $|x|$.

Soit x un réel.

Il existe plusieurs façons *équivalentes* de définir/calculer le nombre $|x|$.

> Simplification.

$$\text{On a } |x| = \begin{cases} = +x & \text{Lorsque } x \geq 0 \\ = -x & \text{Lorsque } x \leq 0 \end{cases}$$

> Majoration/Encadrement.

$|x|$, c'est le plus grand entre $+x$ et $-x$.

Ainsi on a : $-|x| \leq x \leq |x|$

> Distance.

$|x| = |x - 0|$, c'est la distance de x à 0.

Kulture?

$$|x| \leq K \iff \dots \iff -K \leq x \leq K$$

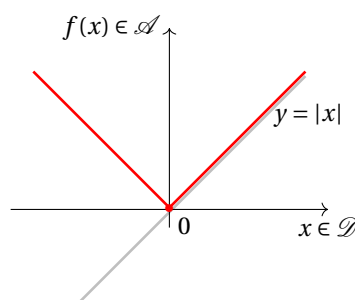
Graphe.

La fonction Valeur Absolue $x \mapsto |x|$

> est définie et continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

> est dérivable sur $\mathcal{D}' = \mathbb{R}^*$.

La fonction Valeur Absolue n'est pas dérivable en 0.



Théorème 4. Formulaire.

Soit x, x', a des réels.

Méthode.

Les valeurs absolues ont vocation à être simplifier

> **Positivité.** $|x|$ est un réel ≥ 0 et $|x| = 0 \iff x = 0$.

> **Calcul.**

$$|-x| = |x| \text{ et } |x \cdot x'| = |x| |x'| \text{ et Si } x' \neq 0, \left| \frac{x}{x'} \right| = \frac{|x|}{|x'|}$$

Attention au piège. $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$

> **Symétrie.** $|a - x| = |x - a|$.

> **Inégalité triangulaire.**

$$|2x + 3x'| \leq 2|x| + 3|x'| \text{ et } |2x - 3x'| \leq 2|x| + |3x'|$$

2.2 Partie entière.

Définition 5. La partie entière de x .

Soit x un réel. Alors il existe un unique entier, noté $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$ tel que

$$\underset{\text{Large}}{\lfloor x \rfloor} \leq x < \underset{\text{Strict}}{\lfloor x \rfloor + 1}$$

Propriétés.

> Lorsque $n = \lfloor x \rfloor$

alors $n \leq x < n+1$ et $x-1 < n \leq x$

> Large : Le plus grand entier p tel que $p \leq x$, c'est $p = \lfloor x \rfloor$

> Strict : Le plus petit entier p tel que $x < p$, c'est $p = \lfloor x \rfloor + 1$

> On a aussi

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ est un entier} \\ n \leq \square < n+1 \end{array} \right\} \iff n = \lfloor \square \rfloor$$

Exercice 1. [Correction]

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$, Alors $\lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} n/2 & \text{Si } n \text{ est pair.} \\ (n-1)/2 & \text{Si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
3. Montrer que $\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n+1$

Exercice 2. [Correction] Soit $n = 2^{2^5} + 1$. On note p le nombre de chiffre de n dans l'écriture décimale

1. Montrer que : $10^{p-1} \leq n < 10^p$.
2. En déduire que : $p = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$

Exercice 3. [Correction] Très Difficile mais sympa. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie de la manière suivante :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = u_3 = 2, \quad u_4 = u_5 = u_6 = 3, \quad u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4, \dots$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les indices de n tel que $u_n = k$
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$

2.3 Majorant, minorant, max, min, sup, inf.

Définition 6. Majoré, minoré, Borné

On considère $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

> On dit que la partie A est majorée Ssi il existe M tel que $\forall x \in A, x \leq M$.

On dit alors que M est un majorant de la partie A .

> On dit que la partie A est minorée Ssi il existe m tel que $\forall x \in A, x \geq m$.

On dit alors que m est un minorant de la partie A .

> On dit que la partie A est bornée Ssi il existe K tel que

$$\forall x \in A, |x| \leq K.$$

Bornée $\iff$ Majorée/minorée.

La partie A est bornée par K

ALORS la partie A est majorée $+K$ et minorée $-K$.

La partie A est majorée M et minorée par m

ALORS la partie A est bornée par $\max(|M|, |m|)$.

Démonstration : On va faire $\implies$ et $\impliedby$.

$\implies$ C'est le sens évident car $|x| \leq K \iff -K \leq x \leq K$.

Donc Si la partie A est bornée par K , alors elle est majorée par K et minorée par $-K$.

$\impliedby$ C'est un peu plus technique.

On suppose que la partie est majorée par M et minorée par m . On a

$$m \leq x \leq M \implies [x \leq M \text{ et } -x \leq -m]$$

Donc x et $-x$ sont $\leq \max(M, -m) \Rightarrow |x| \leq \max(M, -m)$

Conclusion : la partie A est bornée par $\max(M, -m)$.

Définition 7. Max-Sup et min-inf

On considère A une partie.

Max et min. On dit que M_0 est le plus grand élément de A , noté $M_0 = \max(A)$,

Ssi $M_0 \in A$ et M_0 majore la partie A

On définit de même min, le plus petit élément d'un ensemble.

sup - inf. On dit que M est le sup de A , noté $M = \sup(A)$,

Ssi M est la majorant "optimal" de A .

Ainsi $M = \sup(A)$ a deux propriétés "évidentes"

> M est un majorant de A

> M est optimal

Optimal : Traduction A

Le sup est le meilleur majorant,
CàD Si M' est un autre majorant
alors forcément $M \leq M'$

Optimal : Traduction B

Le sup est le meilleur majorant,
CàD comme $M - \varepsilon \underset{\text{Strict}}{<} M$
alors $M - \varepsilon$ ne majore pas.

Quand la partie non vide A n'est pas majoré, alors $\sup(A) = +\infty$.

Les situations possibles.

- > On peut avoir : $M_0 = \max$ n'existe pas et $M = \sup$ n'existe pas.
- > On peut avoir : $M_0 = \max$ n'existe pas et $M = \sup$ existe.
- > Si $M_0 = \max$ existe alors forcément $M = \sup$ existe et $M = M_0$.

Théorème 8. Existence des Max et Sup.Dans $\mathbb{Z}$, les max existent.Si A une partie non vide de $\mathbb{Z}$.Alors $\max(A)$ existe toujours dans $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ $\max(A) \in \mathbb{Z} \iff \max(A) \neq \infty \iff$ la partie A est majoréeDans $\mathbb{R}$, les sup existent.On considère $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. $\sup(A)$ existe toujours dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $\sup(A) \in \mathbb{R} \iff \sup(A) \neq \infty \iff$ la partie A est majorée

En fait, il y a 3 situations possibles.

- > $\sup(A) = +\infty$ et donc la partie A est non-majorée.
- > $\sup(A) = M$ et $M \notin A$. Ici $M = \sup(A)$ et $\max(A)$ n'existe pas.
Par exemple : $A = [0, 1[$.
- > $\sup(A) = M$ et $M \in A$. Ici $M = \sup(A) = \max(A)$.
Par exemple : $A = [0, 1]$.

2.4 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Commençons par un exemple.

On considère le célèbre nombre $\pi = 3,1415192654.....$

On peut tronquer l'écriture décimale, ainsi on a

$$\underbrace{3.141}_{\text{troncature à } 10^{-3}} \leq \pi < 3.141 + 10^{-3} = 3.142$$

$$\text{en plus } 0 \leq \pi - \underbrace{3.141}_{\text{troncature à } 10^{-3}} < 10^{-3}.$$

On dit que

$> 3,141$ est la valeur *décimale* approchée à la précision 10^{-3} de π par défaut.

$> 3,142$ est la valeur *décimale* approchée à la précision 10^{-3} de π par excès.

Il est "facile" d'exprimer $\underbrace{3.141}_{\text{troncature à } 10^{-3}}$ à l'aide de π , en effet

$$\begin{aligned} \pi = 3,1415192653..... &\implies 10^3 \cdot \pi = 3141,5192653..... \\ &\implies \lfloor 10^3 \cdot \pi \rfloor = 3141 \\ \text{Donc } 3.141 &= \frac{\lfloor 10^3 \cdot \pi \rfloor}{10^3} \end{aligned}$$

Si on remplace π par x un réel quelconque, on a le théorème

Théorème 9. Approximation des réels par des rationnels.

Soit x un réel et n un entier

La valeur décimale approchée à la précision 10^{-n} de x par défaut

$$\text{est égale à } \frac{\lfloor x \cdot 10^n \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{De plus, on a } 0 \leq x - \frac{\lfloor x \cdot 10^n \rfloor}{10^n} \leq 10^{-n}.$$

Conclusion : La suite des approximations décimales converge vers x .

Approximation des réels par des rationnels.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

CàD $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_n \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

2.5 Les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 10. Les intervalles.

On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ Ssi $I \subset \mathbb{R}$ et

$$\forall a, b \quad [(a, b) \in I^2 \implies [a, b] \subset I]$$

De façon imagée, un intervalle n'a pas de trou,

sinon on pourrait choisir a et b de part et d'autre du trou.

Exemple : L'ensemble $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle.

En effet, -2 et 1 sont dans $\mathbb{R}^*$ mais $[-2, 1] \not\subset \mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^*$ est la réunion disjointe de $]-\infty, 0[$ et de $]0, +\infty[$.

Il est clair que $\mathbb{R}^*$ a un "petit" trou.

Théorème 11. Liste exhaustive des intervalles de $\mathbb{R}$.

Il y a 3 type d'intervalle non vide.

> Les intervalles ouverts (bornés ou non)

$$]-\infty, +\infty[, \quad]-\infty, b[, \quad]a, +\infty[, \quad]a, b[$$

> Les intervalles semis-ouverts (bornés ou non)

$$]-\infty, a], \quad]a, b], \quad [a, +\infty[, \quad [a, b[$$

> Les intervalles fermés et bornés sont appelés les **segments**

$$[a, b]$$

Démonstration : Soit I un intervalle non vide.

Je note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.

Comme I est une partie non vide de $\mathbb{R}$, on sait que a, b existent et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

A cause des propriétés des sup et des inf, on sait que soit $a \in A$, soit $a \notin A$. (et de même pour b)

Je suppose que $a \in A$ (et donc forcément $a \neq -\infty$) et $b \notin A$ (avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$)

On va montrer avec $\subset$ et $\supset$ que : $A = [a, b[$

$\subset ?$ Soit $x \in A$

Comme $a = \inf(A)$ et $x \in A$, on a $a \leq x$.

Comme $b = \sup(A)$ et $x \in A$, on a $x \leq b$. De plus $b \notin A$ donc $x \neq b$ donc $x < b$.

Conclusion : $a \leq x < b$, CàD $x \in [a, b[$

$\supset ?$ Soit $x \in [a, b[$

Comme $x < b$ et $b = \sup(A)$ = le majorant optimal donc x ne majore pas A .

Donc il existe $a' \in A$ tel que $x < a'$

Comme $a = \inf(A)$ et $x \in A$, on a $a \leq x$.

Ainsi $a \leq x \leq a'$, CàD $x \in [a, a']$.

Or $a, a' \in A$ et A est un intervalle donc $[a, a'] \subset A$

Conclusion : $x \in [a, a'] \subset A$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. Si n est pair alors $n = 2p$ et $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2p}{2} \right\rfloor = \lfloor p \rfloor = p$

Si n est impair alors $n = 2p + 1$ et $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2p+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor p\frac{1}{2} \right\rfloor = p$

2. On encadre, CàD on démontre $4n+1 \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \leq 4n+2$.

On chemine $4n+2 - (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = \dots \geq 0$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Si l'écriture décimale de $n = 2^{2^5} + 1$ a avec exactement p chiffre, on a

$$\underbrace{100 \dots 0}_{p \text{ chiffres}} \leq n \leq \underbrace{999 \dots 9}_{p \text{ chiffres}} < \underbrace{100 \dots 0}_{p+1 \text{ chiffres}}$$

de plus on a $10^{p-1} \leq n < 10^p \iff \dots \iff p \leq \frac{\ln(n)}{\ln(10)} + 1 < p+1$

$$\text{Conclusion : } p = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) On compte et on trouve que $u_n = k \iff \frac{(k-1)k}{2} \leq n < \frac{k(k+1)}{2}$

La fonction $f : x \mapsto \frac{(x-1)x}{2}$ réalise une bijection strictement croissante de $[1 + \infty[$ sur $\mathbb{R}^+$

et on trouve que $f^{-1} : x \mapsto \frac{1 + \sqrt{8x-7}}{2}$

$$\text{Conclusion : } u_n = k \iff \frac{(k-1)k}{2} \leq n < \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\iff f(k) \leq n < f(k+1)$$

$$\iff k \leq f^{-1}(n) < k+1$$

$$\iff k = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$$