Exercice 1. [Correction] Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall\, x, y \in \left]0, +\infty\right[, \quad f\,(x\,y) = x f\,(y) + y\, f\,(x) \quad (E)$$

1. Déterminer les/la valeurs possible de $f\,(1)$.
2. On suppose que f est continue et dérivable sur $\left]0, +\infty\right[$ et vérifie la relation (E)
   (a) On note $\alpha = f'\,(1)$.
   Démontrer que la fonction f est solution sur $\left]0, +\infty\right[$ de l'EDL1 : $t\,z' - z = \alpha\, t$
   (b) Résoudre cette EDL1 sur $\mathscr{D} = \left]0, +\infty\right[$
   (c) Déterminer les fonctions f qui sont solutions du problème.
3. On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)
   Déterminer f

Exercice 2. [Correction] Calcul d'une limite.

1. Étude de la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)}\, dt$
   (a) Déterminer un réel K tel que : $\forall \in [0, \pi/3]\,,\ \sin(t) \leqslant K < 1$
   (b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2\pi}{3} K^n$
   (c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On va maintenant étudier de la suite (S_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

2. Convergence de la suite (S_n)
   (a) Démontrer que la suite (S_n) est majorée, CàD Déterminer une constante M tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant M$
   (b) En déduire que la suite (S_n) converge. *On note S sa limite.*
   (c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$S_n = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)\ \big(1 - \sin(t)\big)}\, dt - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^{n+1}(t)}{\cos(t)\ \big(1 - \sin(t)\big)}\, dt$$
   (d) En déduire que $S = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)\ \big(1 - \sin(t)\big)}\, dt$
3. Calcul de S
   (a) À l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$, démontrer que : $S = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(u-1)^2\,(u+1)}\, du$
   (b) Déterminer des réels a, b, c tel que :
   $$\forall\, u \in \left[0, \sqrt{3}/2\right],\ \frac{1}{(u-1)^2\,(u+1)} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u-1)^2} + \frac{c}{u+1}$$
   (c) Calculer S.

Exercice 3. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on considère Q_n définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{C},\ Q_n\,(z) = \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]$$

   (a) Un peu de calcul

      i. Justifier que Q_n est un polynôme de degré $2n$, déterminer son coefficient dominant.
      Calculer le coefficient de X^{2n-2}

      ii. Est ce que 0 est une racine du polynôme Q_n ?

      iii. Vérifier que le polynôme $Q_n(z)$ est pair, CàD $\forall\, n \in \mathbb{C},\ Q_n(-z) = Q_n(z)$

      iv. Montrer que : $Q_n(z) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k\ impair}}^{2n+1} [\cdots] = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p\, z^{2n-2p}$

   (b) Factorisation de Q_n.

      i. À l'aide des racines $(2n+1)$-ième de l'unité, déterminer les racines $r_1, r_2, ..., r_{2n}$ de Q_n
      Remarque/Rappel : le nombre de racine est égale au degré
      puis exprimer les racines $r_1, r_2, ...$ à l'aide de la fonction Tangente.

      ii. En utilisant la périodicité de la fonction Tangente, justifier que $r_{n+1} = -r_n$.
      On admettra les autres égalités, CàD $r_{n+2} = -r_{n-1}$,.....

      En déduire que :

$$Q_n(X) = (2n+1)\left(X^2 - (r_1)^2\right) .... \left(X^2 - (r_n)^2\right) \quad \text{avec } r_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

   (c) En regardant le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Qn,

$$\text{montrer que : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

2. Une limite très classique.

   (a) Montrer que : $\forall\, x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\quad \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$

   En déduire que : $\forall\, x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\quad \dfrac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\tan^2(x)} + 1.$

   (b) On pose pour $n \geqslant 1,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

      i. A l'aide de l'encadrement précédent et de la question Q1c, construire un encadrement pour S_n.

      ii. En déduire que : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$. *Ce résultat a été démontrer par Euler en 1735*

Exercice 4. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on considère Q_n définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{C},\ Q_n\,(z) = \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]$$

 (a) Un peu de calcul

  i. Justifier que Q_n est un polynôme de degré $2n$, déterminer son coefficient dominant.
  Calculer le coefficient de X^{2n-2}

  ii. Est ce que 0 est une racine du polynôme Q_n ?

  iii. Vérifier que le polynôme $Q_n(z)$ est pair, CàD $\forall\, n \in \mathbb{C},\ Q_n(-z) = Q_n(z)$

  iv. Montrer que : $Q_n(z) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k\ impair}}^{2n+1} [\cdots] = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p\, z^{2n-2p}$

 (b) Factorisation de Q_n.

  i. À l'aide des racines $(2n+1)$-ième de l'unité, déterminer les racines $r_1, r_2, ..., r_{2n}$ de Q_n
  Remarque/Rappel : le nombre de racine est égale au degré
  puis exprimer les racines $r_1, r_2, ...$ à l'aide de la fonction Tangente.

  ii. En utilisant la périodicité de la fonction Tangente, justifier que $r_{n+1} = -r_n$.
  On admettra les autres égalités, CàD $r_{n+2} = -r_{n-1}$,.....

  En déduire que :

$$Q_n(X) = (2n+1)\left(X^2 - (r_1)^2\ \right) .... \left(X^2 - (r_n)^2\ \right) \quad \text{avec } r_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

 (c) En regardant le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Qn,

$$\text{montrer que : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

2. Une limite très classique.

 (a) Montrer que : $\forall\, x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\quad \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$

  En déduire que : $\forall\, x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\quad \dfrac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\tan^2(x)} + 1.$

 (b) On pose pour $n \geqslant 1,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$

  i. A l'aide de l'encadrement précédent et de la question Q1c, construire un encadrement pour S_n.

  ii. En déduire que : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.$ *Ce résultat a été démontrer par Euler en 1735*

Exercice 5. [Correction]

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}\qquad(E)$$

1. Démontrer que : $\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \cosh(a+b)=\cosh(a)\cosh(b)+\sinh(a)\sinh(b)$

   On admet les 3 formules "cousines" $\cosh(a-b)=\cosh(a)\cosh(b)-\sinh(a)\sinh(b)$

   $$\sinh(a+b)=\sinh(a)\cosh(b)+\cosh(a)\sinh(b)$$
   $$\sinh(a-b)=\sinh(a)\cosh(b)-\cosh(a)\sinh(b)$$

   En déduire que les fonctions $T_\alpha : x\longmapsto\tanh(\alpha\,x)$ sont des solutions du problème étudié.

On considère dans la suite une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ fixée, dérivable, et vérifiant (E).

2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
3. On suppose que $f(0)=1$

   Démontrer que la fonctions f est constante égale à 1.

   `On a admet que de même : si` $f(0)=-1$ `alors la fonction` f `est constante égale à` -1.

On suppose dans la suite que $f(0)=0$.

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   En déduire que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ -1\leqslant f(x)\leqslant 1$.
5. On suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=1$, montrer qu'alors $f(0)=1$

   En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 1$

   `On a admet que de même on peut démontrer que :` $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq -1$

   On vient de démontrer que $\forall\,x\in\mathbb{R},\ -1<f(x)<1$.
6. Démontrer que : il existe α tel que $\forall\,t\in\mathbb{R},\ f'(t)=\alpha\left[1-f^2(t)\right]$
7. Avec un DES, déterminer une primitive H de $\dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.
8. En déduire une expression de $H\circ f$ puis déterminer f.

Exercice 6. [Correction] La formule de John Machin et application au calcul des décimales de π.

John Machin (1680-1751) est un mathématicien anglais connu principalement pour avoir calculé, en 1706, 100 décimales du nombre ? grâce à la formule qui porte son nom, la formule de Machin

1. La formule de John Machin

   Je note $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

   (a) Calculer $\tan(2\alpha)$ puis $\tan(4\alpha)$.

   (b) `Calcul pas difficile mais un lourd, admette ?`

   En déduire que : $4\alpha - \beta$ est une solution de l'équation $\tan(X) = 1$

   (c) Justifier que $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, puis encadrer $4\alpha - \beta$.

   En déduire la formule de John Machin, CàD $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2. La formule de John Machin (deuxième démonstration)

   On considère le complexe $A = \frac{(5+i)^4}{239+i}$

   (a) D'une part. Vérifier (admettre) que $A = 2(1+i)$ puis mettre A sous forme circulaire.

   (b) D'autre part.

   On suppose $a > 0$. Calculer $\cos(\arctan a)$ et $\sin(\arctan a)$

   Soit $x > 0$. Montrer que : $x + i = \sqrt{x^2+1}\, e^{i\arctan(1/x)}$.

   En déduire une nouvelle forme circulaire pour le complexe A

   (c) En déduire que : $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

   attention rigueur : $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \not\Rightarrow \alpha = \beta$. *Mais* $e^{i\alpha} = e^{i\beta} \iff \alpha \equiv \beta \mod [2\pi]$.

   pour conclure, il faut utiliser l'encadrement de Q1c

3. Approximation de $\arctan(a)$

   Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$s_n(a) = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$

   (b) En déduire que : $s_n(a) - \arctan(a) = (-1)^n \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left| s_n(a) - \arctan(a) \right| \leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}$

   (e) La suite $\left(s_n(a)\right)$ converge-t-elle ?

4. Approximation de π.

   Montrer que :

$$\left| \frac{\pi}{4} - 4\, s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right) \right| \leqslant 4\frac{1}{(2n+3)5^n} + \frac{1}{(2n+3)239^n}$$

5. Bonus sans question, rien que pour les yeux : Application au calcul de 3 décimales de π

> Lorsque $n=3$, on a : $4\dfrac{1}{(2\,.3+3)5^3}+\dfrac{1}{(2\,.3+3)239^3}=\dfrac{4}{9.125}+\dfrac{1}{9.13\ 651\ 919}$
$= 0,0035.... + 0.0000.... \approx 0.0035$

Ainsi $\left|\dfrac{\pi}{4}-4\,s_3\left(\dfrac{1}{5}\right)+s_3\left(\dfrac{1}{239}\right)\right|\leqslant 0.0035$

$\Longrightarrow \left|\pi-16\,s_3\left({}^1/_5\right)+4s_3\left({}^1/_{239}\right)\right|\leqslant 4\times 0.0035=0,014$

> De plus on a

$$\begin{aligned}
s_3\left({}^1/_5\right) &= \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)\,5^{2k+1}}\\
&= \frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}\\
&= \frac{1}{5}-\frac{1}{375}+\frac{1}{15\ 625}\\
&= 0.2-0,0026...+0,000064+0,00000...\\
&\approx 0,1974
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_3\left({}^1/_{239}\right) &= \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)\,239^{2k+1}}\\
&= \frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\frac{1}{7.239^7}\\
&\approx 0,0042
\end{aligned}$$

> Ainsi $16\,s_3\left({}^1/_5\right)-4s_3\left({}^1/_{239}\right)=16\times 0,1974-4\times 0,0042$
$=3,1584-0,0168$
$=3,1416$

Conclusion : $\left|\pi-16\,s_3\left({}^1/_5\right)+4s_3\left({}^1/_{239}\right)\right|=\left|\pi-3,1416\right|\leqslant 0.014$
CàD on a donc 2 décimales justes,

$$\boxed{\text{CàD } \pi\approx 3,14...}$$

Avec une meilleur analyse/contrôle de l'erreur, on montre que $\left|\pi-3,1416\right|\leqslant 0.001$,
CàD on a en fait 3 décimales justes $\pi\approx 3,141...$

John Machin a utilisé cette méthode pour calculer <u>à la main</u> 100 décimales de π

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation

$$\forall\, x, y \in\,]0,+\infty[\,,\quad f\,(x\,y) = xf\,(y) + y\,f\,(x) \quad (E)$$

1. Déterminer les/la valeurs possible de $f\,(1)$.

   J'applique l'égalité avec $x = y = 1$

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi } f\,(1.1) &= 1.f\,(1) + 1.f\,(1) \\ \Longrightarrow\ f(1) &= 2f(1) \\ \Longrightarrow\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$

2. On suppose que f est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et vérifie la relation (E)

   (a) On note $\alpha = f'\,(1)$. Démontrer que la fonction f est solution sur $]0,+\infty[$ de l'EDL1 : $t\,z' - z = \alpha\,t$

   Je dérive l'égalité en x

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi } \frac{d}{dx}\,[f\,(x\,y)] &= \frac{d}{dx}\,[xf\,(y) + y\,f\,(x)\,] \\ \Longrightarrow\ y\ f'\,(x\,y) &= f\,(y) + y\,f'\,(x) \end{aligned}$$

   On applique cette égalité avec $x = 1$ et $y = t$, ainsi

   $$t\ f'\,(t) = f\,(t) + t\,f'\,(1)$$

   $$\text{On a bien } \forall\, t > 0,\ t\ f'\,(t) - f\,(t) = \alpha t$$

   (b) Résoudre cette EDL1 sur $\mathscr{D} =]0,+\infty[$

   Sur $\mathscr{D} =]0,+\infty[$, on résout l'EDL1 complète $tz' - z = \alpha\,t \iff z' - \dfrac{1}{t}z = \alpha$

   > Équation homogène

   comme une primitive de $a(t) = \dfrac{-1}{t}$ est $A(t) = -\ln|t|$,

   On a : $\forall\, t > 0,\ h(t) = K\,e^{-A(t)} = K\,t$ avec $K \in \mathbb{R}$

   > Solution particulière y_p

   On cherche y_p de la forme $y_p(t) = C(t)\,t$

   Comme $ty_p' - y_p = \alpha\,t$, on obtient $C'(t)\,t^2 = \alpha\,y \iff C'(t)\dfrac{\alpha}{t}$

   Je choisis $C(t) = \alpha\ln(t)$. Ainsi $y_p(t) = C(t)\,t = \alpha\,t\ln|t|$ convient

   Conclusion : Les sol sont : $\forall\, t > 0,\ z(t) = \alpha\,t\ln(t) + Kt$ avec $K \in \mathbb{R}$

   (c) Déterminer les fonctions f qui sont solutions du problème.

   Comme les solutions du problème vérifient $f(1) = 0$, on doit avoir $K = 0$

   Donc les solutions du problème sont de la forme $\forall\, t > 0,\ f(t) = \alpha\,t\ln(t)$

   et il est facile de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions du problème

   Conclusion : les solutions du problème sont : $\forall\, t > 0,\ f(t) = \alpha\,t\ln(t)$

3. BONUS : On suppose que f est seulement continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie la relation (E)

   Comme f est continue sur $]0,+\infty[$, elle admet , sur $]0,+\infty[$, des primitive $\mathfrak{F}$
   et on note H l'une d'elle

   > Je primitive $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ en la variable x

   Ainsi on a : $\forall\, x, y > 0,\ \dfrac{H(xy)}{y} = \dfrac{x^2}{2}f(y) + xH(y)$

   > J'applique avec $x = 1$ et $y = t$

   ainsi on a $\dfrac{H(t)}{t} = \dfrac{1}{2}f(t) + H(t)$

   $$\Longrightarrow\ \forall\, t > 0,\ f(t) = \frac{2H(t)}{t} - 2H(t)$$

   Conclusion : f s'exprime à l'aide de fonction dérivables
   ainsi f est dérivable et la conclusion Q2c est encore valide.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Étude de la suite (u_n)

   (a) La fonction Sinus est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$

   Ainsi on a : $\forall \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, $\sin(t) \leqslant \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = K < 1$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Comme Cosinus est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, on a

$$\forall \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \; 0 \leqslant \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} \leqslant \frac{K^n}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{K^2}{1/2} = 2\,K^n$$

   On intègre sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$, ainsi on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2\pi}{3} K^n$

   Enfin le théorème des gendarmes assurent que : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Convergence de la suite (S_n)

   (a) On somme l'inégalité de $k = 0$ à $k = n$ ainsi

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2\pi}{3} K^k \\ &\leqslant \frac{2\pi}{3} \frac{1 - K^{n+1}}{1 - K} \\ &\quad \textit{On a } 0 \leqslant K^{n+1} \leqslant K^n \leqslant \cdots \leqslant K^2 \leqslant K \leqslant 1 \\ &\leqslant \frac{2\pi}{3} \frac{1 - 0}{1 - K} \end{aligned}$$

   Conclusion : La suite (S_n) est majorée par $\dfrac{2\pi}{3} \dfrac{1}{1 - K}$

   (b) Comme $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \underbrace{\frac{\sin^{n+1}(t)}{\cos(t)}}_{\geqslant 0 \; sur\left[0, \pi/3\right]} dt \geqslant \int_0^{\pi/3} 0 dt = 0,$

   la suite (S_n) est croissante et majorée donc la suite (S_n) converge vers $S \leqslant \dfrac{2\pi}{3} \dfrac{1}{1 - K}$

   (c) On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^k(t)}{\cos(t)}\, dt &= \int_0^{\pi/3} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k(t)}{\cos(t)}\, dt \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)} \frac{1 - \sin^{n+1}(t)}{1 - \sin(t)}\, dt \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)} \frac{1}{1 - \sin(t)}\, dt - \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)} \frac{\sin^{n+1}(t)}{1 - \sin(t)}\, dt \end{aligned}$$

   (d) $\boxed{\text{Avec le théorème de gendarmes, on montre } \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)} \frac{\sin^{n+1}(t)}{1 - \sin(t)}\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

   On a

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)} \frac{\sin^{n+1}(t)}{1 - \sin(t)}\, dt \leqslant \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(\pi/3)} \frac{K^{n+1}(t)}{1 - \sin(\pi/3)}\, dt \leqslant \frac{K^{n+1}}{\cos(\pi/3)\,\big(1 - \sin(\pi/3)\big)}$$

   Ainsi $S_n = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)} \frac{1}{(1 - \sin(t))}\, dt - \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)} \frac{\sin^{n+1}(t)}{1 - \sin(t)}\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)\,\big(1 - \sin(t)\big)}\, dt - 0$

   Conclusion : $S = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)\,\big(1 - \sin(t)\big)}\, dt$

3. Calcul de S

   (a) OK

(b) Pour tout $\forall\, u \in \left[0, \sqrt{3}/2\right]$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u-1)^2} + \frac{c}{u+1} &= \frac{a(u-1)(u+1) + b(u+1) + c(u-1)^2}{(u-1)^2\,(u+1)} \\
&= \frac{u^2(a+c) + u(b-2c) + (-a+b+c)}{(u-1)^2\,(u+1)}
\end{aligned}$$

On choisit $\begin{cases} a \quad\quad + \ \ c = 0 \\ \quad\quad b - 2c = 0 \\ -a + b + \ \ c = 1 \end{cases} \iff a = -1/4\ ,\ b = 1/2\ ,\ c = 1/4$

(c) Pour finir, on a

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{(u-1)^2\,(u+1)}\,du \\
&= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{-1/4}{u-1} + \frac{1/2}{(u-1)^2} + \frac{1/4}{u+1}\,dt \\
&= -1/4\ \left[\ln|u-1|\right]_0^{\sqrt{3}/2} + 1/2\ \left[\frac{-1}{u-1}\right]_0^{\sqrt{3}/2} + 1/4\ \left[\ln|u+1|\right]_0^{\sqrt{3}/2} \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} - \frac{-1}{0-1}\right] + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2-\sqrt{3}} - 1\right] \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{4}\ln(7+2\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(3+2\sqrt{3}) \qquad \mathit{Ouf}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3 **(Énoncé)**

1. On a $Q_n(0) = \dfrac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right] = \dfrac{1}{2i}\left[2(i)^{2n+1}\right] = \dfrac{1}{i}\left[i\,(i^2)^n\right] = (-1)^n \neq 0.$

   Donc 0 n'est pas une racine de Q_n.
2. On a $Q_n(-X) = \cdots = Q_n(X)$ donc le polynôme Q_n est pair.
3. Avec le binôme on a

$$\begin{aligned}
Q_n(z) &= \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i)^k(z)^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k(z)^{2n+1-k}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k \underbrace{\left[1-(-1)^k\right]}_{=\text{ à 0 ou 2 selon parités}} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0,\ k\,impair}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k\,2 \\
&\quad \textit{On ré-indexe avec } k = 2p+1. \textit{ C'est possible car } k \textit{ est impair} \\
&= \frac{1}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(z)^{2n+1-(2p+1)}\underbrace{(i)^{2p+1}}_{=i\,(-1)^p} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\, z^{2n-2p}
\end{aligned}$$

   Ainsi

   $>$ Sur le plateau $p=0$, on lit coefficient de z^{2n}, c'est $a_{2n} = \dbinom{2n+1}{1} = 2n+1$

   $>$ Sur le plateau $p=1$, on lit coefficient de z^{2n-2}, c'est $a_{2n} = -\dbinom{2n+1}{3} = -\dfrac{(2n+1)\,(2n)\,(2n-1)}{6}$
4. On résout l'équation $Q_n(z) = 0$.

$$\begin{aligned}
Q_n(z) = 0 &\iff (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0 \\
&\iff \left\{ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 0 \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ll} U^{2n+1} = 1 & (A) \\ et & \\ \frac{z+i}{z-i} = U & (B) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

   $>$ Résolution de (A).

   Les solutions sont les racines (2n+1)-ième de l'unité,

   CàD $\omega_k = \exp\left(i\,k\,\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in \{0,..,2n\}$

   $>$ Résolution de (B) .

   On a $\dfrac{z+i}{z-i} = U_k \Leftrightarrow z+i = \omega_k\,(z-i)$

   $\Leftrightarrow z\,(1-\omega_k) = -i\,(1+\omega_k)$

   $\boxed{\text{Situation } \omega_0 = 1}$

   Dans cette situation,
   l'équation n'a pas de solution en z.

   $\boxed{\text{Situation } \omega_1,..,\omega_{2n} \neq 1}$

   On a $z = r_k = \dfrac{-i\,(1+\omega_k)}{1-\omega_k}$ avec $k \in \{1,..,2n\}$

Conclusion : On a $2n$ racines $r_k = \dfrac{-i\,(1+\omega_k)}{1-\omega_k}$ avec $k \in \{1,..,2n\}$

De plus pour tout $k \in \{1,..,2n\}$, on a

$$r_k = \frac{-i\,(1+\omega_k)}{(1-\omega_k)} = \frac{-i\left(1+\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right)}{1-\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)}$$
$$= \text{Argument Moitié} = \frac{\cos\frac{k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{2n+1}}$$

5. On remarque que $r_{n+1} = -r_n$, $r_{n+2} = -r_{n-1}$... etc ... on le justifie en utilisant la π-périodicité et l'imparité de $\tan$.
   On a maintenant

$$\begin{aligned} Q_n(X) &= (2n+1)\,(X-r_1)\,(X-r_2)\ldots(X-r_n)\ \ (X+r_1)\,(X+r_2)\ldots(X+r_n) \\ &= (2n+1)\,(X-r_1)\,(X+r_1)\ldots(X-r_n)\,(X+r_n) \\ &= (2n+1)\left(X^2-(r_1)^2\right)\left(X^2-(r_2)^2\right)\ldots\left(X^2-(r_n)^2\right) \end{aligned}$$

6. Le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Q est égale à

   $>$ D'une part avec la question Q2a., il est égale à : $-\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$

   $>$ D'autre part avec la factorisation de la question Q5, il est égale à : $(2n+1)\left[-r_1^2-\cdots-r_n^2\right]$

$$\text{Conclusion : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = r_1^2+....+r_n^2 = \frac{\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

7. (a) Convexité.
   (b) On sait que : $0<a<b<c \implies 0<a^2<b^2<c^2$, ainsi

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ & 0<\sin x \leqslant x \leqslant \tan x \\ &\implies 0<\sin^2 x \leqslant x^2 \leqslant \tan^2 x \\ &\implies 0 < \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \\ &\implies 0 < \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x} \\ &\implies 0 < \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < 1+\frac{1}{\tan^2 x} \end{aligned}$$

   (c) Pour tout $k \in \{1,..,n\}$,alors $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2}$. On applique donc d'après l'inégalité précédente avec $\dfrac{k\pi}{2n+1}$

$$\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leqslant \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+1$$

   On somme l'encadrement précédent de $k=1$ à $k=n$ et on utilise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n\,(2n-1)}{3}$, ainsi

$$\frac{n\,(2n-1)}{3} \leqslant \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 S_n \leqslant \frac{n\,(2n-1)}{3}+n$$

   (d) On isole S_n puis utilise le théorème d'encadrement.

Solution de l'exercice 4 **(Énoncé)**

1. On a $Q_n(0) = \dfrac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right] = \dfrac{1}{2i}\left[2(i)^{2n+1}\right] = \dfrac{1}{i}\left[i\,(i^2)^n\right] = (-1)^n \neq 0.$

   Donc 0 n'est pas une racine de Q_n.
2. On a $Q_n(-X) = \cdots = Q_n(X)$ donc le polynôme Q_n est pair.
3. Avec le binôme on a

$$\begin{aligned}
Q_n(z) &= \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(i)^k(z)^{2n+1-k} - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-i)^k(z)^{2n+1-k}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k \underbrace{\left[1-(-1)^k\right]}_{=\text{ à 0 ou 2 selon parités}} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{k=0,\ k\,impair}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(z)^{2n+1-k}(i)^k\,2 \\
&\quad \textit{On ré-indexe avec } k = 2p+1. \textit{ C'est possible car } k \textit{ est impair} \\
&= \frac{1}{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(z)^{2n+1-(2p+1)}\underbrace{(i)^{2p+1}}_{=i\,(-1)^p} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\,z^{2n-2p}
\end{aligned}$$

   Ainsi

   > Sur le plateau $p = 0$, on lit coefficient de z^{2n}, c'est $a_{2n} = \dbinom{2n+1}{1} = 2n+1$

   > Sur le plateau $p = 1$, on lit coefficient de z^{2n-2}, c'est $a_{2n} = -\dbinom{2n+1}{3} = -\dfrac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$
4. On résout l'équation $Q_n(z) = 0$.

$$\begin{aligned}
Q_n(z) = 0 &\iff (z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0 \\
&\iff \left\{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 0\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} U^{2n+1} = 1 & (A) \\ et & \\ \frac{z+i}{z-i} = U & (B) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

   > Résolution de (A).

   Les solutions sont les racines (2n+1)-ième de l'unité,

   CàD $\omega_k = \exp\left(i\,k\,\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in \{0,..,2n\}$

   > Résolution de (B) .

   On a $\dfrac{z+i}{z-i} = U_k \Leftrightarrow z + i = \omega_k\,(z-i)$

$$\Leftrightarrow z\,(1-\omega_k) = -i\,(1+\omega_k)$$

$\boxed{\text{Situation } \omega_0 = 1}$	$\boxed{\text{Situation } \omega_1,..,\omega_{2n} \neq 1}$
Dans cette situation, l'équation n'a pas de solution en z.	On a $z = r_k = \dfrac{-i\,(1+\omega_k)}{1-\omega_k}$ avec $k \in \{1,..,2n\}$

Conclusion : On a $2n$ racines $r_k = \dfrac{-i\,(1+\omega_k)}{1-\omega_k}$ avec $k \in \{1,..,2n\}$

De plus pour tout $k \in \{1, .., 2n\}$, on a

$$r_k = \frac{-i\,(1+\omega_k)}{(1-\omega_k)} = \frac{-i\left(1+\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right)}{1-\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)}$$
$$= \text{Argument Moitié} = \frac{\cos\frac{k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{2n+1}}$$

5. On remarque que $r_{n+1} = -r_n$, $r_{n+2} = -r_{n-1}$... etc ... on le justifie en utilisant la π-périodicité et l'imparité de $\tan$.
   On a maintenant

$$\begin{aligned} Q_n(X) &= (2n+1)\,(X-r_1)\,(X-r_2)\,...\,(X-r_n)\;\;(X+r_1)\,(X+r_2)\,...\,(X+r_n) \\ &= (2n+1)\,(X-r_1)\,(X+r_1)\,...\,(X-r_n)\,(X+r_n) \\ &= (2n+1)\left(X^2-(r_1)^2\right)\left(X^2-(r_2)^2\right)...\left(X^2-(r_n)^2\right) \end{aligned}$$

6. Le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Q est égale à

   $>$ D'une part avec la question Q2a., il est égale à : $-\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$

   $>$ D'autre part avec la factorisation de la question Q5, il est égale à : $(2n+1)\left[-r_1^2-\cdots-r_n^2\right]$

$$\text{Conclusion : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = r_1^2+....+r_n^2 = \frac{\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

7. (a) Convexité.

   (b) On sait que : $0<a<b<c \implies 0<a^2<b^2<c^2$, ainsi

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\; & 0<\sin x \leqslant x \leqslant \tan x \\ & \implies 0<\sin^2 x \leqslant x^2 \leqslant \tan^2 x \\ & \implies 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<\frac{1}{\sin^2 x} \\ & \implies 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x} \\ & \implies 0<\frac{1}{\tan^2 x}<\frac{1}{x^2}<1+\frac{1}{\tan^2 x} \end{aligned}$$

   (c) Pour tout $k \in \{1, .., n\}$,alors $0<\dfrac{k\pi}{2n+1}<\dfrac{\pi}{2}$. On applique donc d'après l'inégalité précédente avec $\dfrac{k\pi}{2n+1}$

$$\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leqslant \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)+1$$

   On somme l'encadrement précédent de $k=1$ à $k=n$ et on utilise $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n\,(2n-1)}{3}$, ainsi

$$\frac{n\,(2n-1)}{3} \leqslant \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 S_n \leqslant \frac{n\,(2n-1)}{3}+n$$

   (d) On isole S_n puis utilise le théorème d'encadrement.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

Dans cette partie, on considère une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ fixée, dérivable, et satisfaisant (E).

1. Démontrer que : $\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \cosh(a+b)=\cosh(a)\cosh(b)+\sinh(a)\sinh(b)$
   En déduire que les fonctions $T_\alpha : x\longmapsto \tanh(\alpha\, x)$ sont des solutions du problème étudié.

On considère dans la suite une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ fixée, dérivable, et vérifiant (E).

2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

On applique avec $x=0$ et $y=0$,

ainsi on a $f(0+0)=\dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$

$$\iff f(0)\left(1+f(0)^2\right)-2f(0)=0$$
$$\iff f(0)\left(f(0)^2-1\right)=0$$
$$a\iff f(0)\left(f(0)-1\right)\left(f(0)+1\right)=0$$

Conclusion $f(0)$ égale à 0,1 ou -1.

3. On suppose que $f(0)=1$. Démontrer que la fonctions f est constante égale à 1.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, j'applique avec $x=t$ et $y=0$, ainsi $f(x)=\dfrac{f(x)+1}{1+f(x).1}=\dfrac{\square}{\square}=1$

Conclusion : La fonction f est constante égale à 1.

$\boxed{\text{On suppose dans la suite que } f(0)=0.}$

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$. On a

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}=\frac{2\gamma}{1+\gamma^2}\quad \textit{avec } \gamma=\frac{x}{2}$$

En déduire que : $\forall\,x\in\mathbb{R},\ -1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

On a maintenant : $1-f(x)=1-\dfrac{2\gamma}{1+\gamma^2}=\dfrac{1+\gamma^2-2\gamma}{1+\gamma^2}=\dfrac{(1-\gamma)^2}{1+\gamma^2}\geqslant 0$

$$f(x)+1=\cdots=\frac{(1+\gamma)^2}{1+\gamma^2}\geqslant 0$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall\,x\in\mathbb{R},\ f(x)\in\left[-1,1\right].}$

5. On suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=1$, Montrer qu'alors $f(0)=1$. En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 1$

J'applique avec $x=a$ et $y=-a$, ainsi $f(0)=\dfrac{1+f(-a)}{1+1.f(-a)}=\dfrac{\square}{\square}=1$

Oups ! ! ! Conclusion : l'info "il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=1$" est FAUSSE

Sa négation, CàD $\forall\,x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 1$ est VRAIE

6. Montrer qu'alors $f(0)=1$. En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 1$

On dérive la relation par rapport à 'x', ainsi on a $\dfrac{d}{dx}\left[f(x+y)\right]=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}\right]$

$$\forall\,x,y$$
$$quad1.f'(x+y)=\frac{f'(x)\left[1+f(x)f(y)\right]-\left[f(x)+f(y)\right]f'(x)f(y)}{\left[1+f(x)f(y)\right]^2}$$
$$=\frac{f'(x)-f(y)f'(x)f(y)}{\left[1+f(x)f(y)\right]^2}$$
$$=\frac{f'(x)\left[1-f(y)f(y)\right]}{\left[1+f(x)f(y)\right]^2}$$

J'applique avec $x=0$ et $y=t$, ainsi

$$f'(t)=\frac{f'(0)\left[1-f(t)f(t)\right]}{\left[1+f(0)f(t)\right]^2}=\alpha\left[1-f^2(t)\right]\quad \textit{avec } \alpha=f'(0)$$

Démontrer que : il existe α tel que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \alpha\left[1 - f^2(t)\right]$

7. Avec un DES, déterminer une primitive H de $\dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$.

   On trouver $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1/2}{x+1} - \dfrac{1/2}{x-1}$

   Ainsi une primitive H de $\dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$,

   $$\text{c'est } H(x) = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

8. En déduire une expression de $H \circ f$ puis déterminer f.

   $>$ Comme $\dfrac{1}{1-x^2} \rightsquigarrow H(x)$, on a $\dfrac{u'}{1-u^2} \rightsquigarrow H(u)$

   $>$ On a maintenant $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f'(t) = \alpha\left[1 - f^2(t)\right] \iff \dfrac{f'(t)}{1-f^2(t)} = \alpha$ c'est légitime car $f(x) \in \Big[-1, 1\Big]$

   On primitive cette égalité, ainsi $\forall\, t \in \mathbb{R},\ H\left(f(x)\right) = \alpha x + K$

   Comme $H(0) = 0$ on a forcément $K = 0$

   $$\text{Conclusion : } \forall\, t \in \mathbb{R},\ H\Big(f(x)\Big) = \alpha x$$

   $>$ On a maintenant $H\left(f(x)\right) = \alpha x \iff \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}\right) = \alpha x$

   $$\iff$$

   $$\iff f(x) = \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2\alpha x} + 1} = T_\alpha(x)$$

Conclusion : Les fonctions f de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$, dérivable et vérifiant (E) sont

$>$ La fonction constante égale à 1

$>$ La fonction constante égale à -1

$>$ Les fonction $T_\alpha : x \longmapsto \tanh(\alpha x)$

Solution de l'exercice 6 **(Énoncé)**

1. On va calculer
$$4\arctan(\frac{1}{5})-\arctan(\frac{1}{239})$$
.

   Je note $\alpha=\arctan(\frac{1}{5})$ et $\beta=\arctan(\frac{1}{239})$

   (a) Un peu de calcul.

      i. Ok

      ii. On a $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

      Comme $\alpha=\arctan(\frac{1}{5})$ et $\arctan(\frac{1}{5})$ vérifie l'équation $\tan x=\frac{1}{5}$ on a $\tan\alpha=\frac{1}{5}$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2.\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{5}{12}$$
$$Ainsi$$
$$\tan(4\alpha)=\frac{2\tan(2\alpha)}{1-\tan^2(2\alpha)}=\frac{2.\frac{12}{5}}{1-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{120}{119}$$

      iii. On a $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$, ainsi
$$\tan(4\alpha-\beta)=\tan(4\alpha+(-\beta))=\frac{\tan(4\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(4\alpha)\tan(\beta)}=.....=1$$

   (b) Conclusion.

      $>$ Comme $\tan(4\alpha-\beta)=1$, $4\alpha-\beta$ est une solution de l'équation $\tan(X)=1$.

      $>$ On sait que $\tan(X)=1 \iff X\equiv\frac{\pi}{4}\,mod\,[\pi]$.

      $>$ Comme $Arctangente$ est strictement croissante, on a bien
$$0=\arctan(0)<\arctan(\frac{1}{239})<\arctan(\frac{1}{5})<\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

      Ainsi $0\leqslant 4\alpha-\beta\leqslant 4\frac{\pi}{4}-0=\pi$

      Sur $]0,\pi[$, l'équation $\tan(X)=1$ a une unique solution $\frac{\pi}{4}$

      A cause de l'unicité, $4\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$

2.

   (a) Somme géo

   (b) On intègre l'égalité précédente sur $[0,a]$

      Ainsi $\displaystyle\int_0^a Gauche\,dt=\int_0^a Droite\,dt$
$$\int_0^a Gauche\,dt=\cdots=a-\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{2n+1}$$
$$\int_0^a Droite\,dt=\cdots=\arctan(a)+(-1)^n\int_0^a\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

   (c) On a
$$\int_0^a\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\leqslant\int_0^a\frac{t^{2n+2}}{1+0}\,dt=\big[Primitive\big]_0^a=\frac{a^{2n+3}}{2n+3}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
|s_n(a) - arctan(a)| &= \left| \int_0^a \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\, dt \right| \\
&\textit{Inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \int_0^a \left| \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \right| dt \\
&\textit{On simplifie les V.A.} \\
&\leqslant \int_0^a \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \\
&\textit{On utilise la question précédente} \\
&\leqslant \frac{a^{2n+3}}{2n+3}
\end{aligned}$$

(e) La suite $(s_n(a))$ converge vers $\arctan(a)$

3. Approximation de π.

(a) On a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\pi}{4} - 4\, s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right) \right| &= \left| 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 4\, s_n\left(\frac{1}{5}\right) + s_n\left(\frac{1}{239}\right) \right| \\
&= \left| 4 \left[\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - s_n\left(\frac{1}{5}\right) \right] - \left[\arctan\left(\frac{1}{239}\right) - s_n\left(\frac{1}{239}\right) \right] \right| \\
&\leqslant 4 \left| \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - s_n\left(\frac{1}{5}\right) \right| \oplus \left| \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - s_n\left(\frac{1}{239}\right) \right| \\
&\leqslant 4 \frac{1}{(2n+3)5^n} + \frac{1}{(2n+3)239^n} \\
&\leqslant 4 \frac{1}{(1)\, 5^n} + \frac{1}{(1)\, 5^n} = \frac{1}{5^{n-1}}
\end{aligned}$$

(b) L'erreur commise soit $\leqslant 10^{-100}$, CàD que l'approximation ait 100 décimales justes, lorsque

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5^{n-1}} \leqslant 10^{-100} &\iff 10^{100} \leqslant 5^{n-1} \\
&\iff 100 \ln(10) \leqslant (n-1)\ln(5) \\
&\iff 100 \frac{\ln(10)}{\ln(5)} + 1 \leqslant n \\
&\iff 100 \times 1.43 + 1 \leqslant n \\
&\iff 145 \leqslant n
\end{aligned}$$

Proposer un programme Python qui calcule 100 décimales de π

Si vous êtes courageux (comme John Machin) faites le calcul à la main.