Exercice 1. [Correction] **La fonction W de Lambert**

Dans tout le sujet, on note $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array} \right.$.

On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

1. La fonction W.
   (a) Justifier que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $\left[-e^{-1}, +\infty\right[$.
   Dans toute la suite du sujet, on note W sa bijection réciproque.
   (b) Propriétés de la fonction W
   Propriétés élémentaires : $W(b) = \cdots$, Bij de ... sur ..., monotonie, parité.
   Calculer $W(0)$ et $W(e)$.
   Faire sur un même dessin les graphes des fonctions f est W.
   (c) Justifier la grande propriété de la fonction W
   $$\text{CàD } \forall x \in \texttt{à préciser},\ W(x)\, e^{W(x)} = x$$
   (d) Donner les ensemble $\mathscr{D}$ de définition/continuité et $\mathscr{D}'$ de dérivabilité de la fonction W
   et Justifier (en utilisant Q1c) que : $\forall x \in \mathscr{D}'$ *et* $x \neq 0,\ W'(x) = \dfrac{W(x)}{x\big(1 + W(x)\big)}$
   (e) On va démontrer que : $\dfrac{W(x)}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$
   i. Justifier que pour tout $x > 0, W(x) = \ln(x) - \ln(W(x))$.
   ii. En déduire que : pour tout $x > e,\ 0 \leqslant \ln(W(x)) \leqslant \ln(\ln(x))$.
   iii. Déduire des deux question précédente un encadrement de $\dfrac{W(x)}{\ln(x)}$ et conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{W(x)}{\ln(x)} = 1$.
2. La fonction V
   (a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur $\left[-e^{-1}, 0\right[$.
   Dans toute la suite du sujet, on note V sa bijection réciproque.
   (b) Propriétés de la fonction V
   Propriétés élémentaires : $V(x) = \cdots$, Bij de ... sur ..., monotonie, parité.
   Faire sur un même dessin les graphes des fonctions f est V.
3. Les équations $f(x) = \beta \iff x\,e^x = \beta$
   Faites le graphe de la fonction f
   Discuter selon les valeurs $\beta \in \mathbb{R}$ le nombre de solution de l'équation $f(X) = \beta$
   et exprimer les solutions à l'aide des fonctions W et V
4. Application d'une autre équation
   On considère a et b deux réels non nuls, et $c \in \mathbb{R}$.
   On s'intéresse à l'équation (E) : $ae^x + bx = c$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $ae^x + bx = c \iff \left(-x + \dfrac{c}{b}\right) e^{-x+\frac{c}{b}} = \dfrac{a}{b} e^{\frac{c}{b}}$.
   En déduire comment on pourrait résoudre l'équation (E)
5. Application d'une autre-autre équation
   Soit $x > 0$. Justifier qu'il existe un unique réel $z \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{-z}$.
   En déduire, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, comment on pourrait résoudre l'équation l'équation $\dfrac{x}{\ln(x)} = \lambda$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.

Exercices plus difficiles et donc facultatifs

Exercice 2. On considère les opérateurs R et S, définie : par pour toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$R(f) : x \longmapsto f(x+1) \text{ et } S(f) : x \longmapsto f(x-1).$$

1. Calculer l'image du polynôme $X^2 + X + 1$, CàD calculer $R(X^2 + X + 1)$
2. Montrer que : $R \circ S = id$ et $S \circ R = id$

Conclusion : R réalise une bijection de ...... sur ...... et S est sa bij réciproque.

Exercice 3. [Correction] Soient f, g deux fonction de E à valeurs dans E.

On suppose que :

$> f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$

$> f$ est injective.

1. Justifier que : g est injective
2. Montrer que : $f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g = f$.
   En déduire que $\forall\, e \in E,\ [g \circ f \circ g \circ f \circ g](e) = e$.
3. En déduire que g et f sont bijectives.

Exercice 4. On considère A et B deux parties non vides d'un ensemble E.

On considère la fonction f de $\mathscr{P}(E)$ à valeurs dans $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ définie par

$$\forall\, X \in \mathscr{P}(E), \quad f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Calculer $f(E),\ f(A),\ f(B),\ et\ f(\varnothing)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
4. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1} la bijection réciproque.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) 1. La fonction W.

(a) Justifier que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $\left[-e^{-1},+\infty\right[$.

> La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}=[-1,+\infty[$
> $\forall\, x\in\mathscr{D},\ f'(x)=e^x+x\,e^x=e^x(x+1)$
> D'où le tableau de signe/variation

Conclusion : La fonction f est continue et strictement croissante
Donc f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $\left[-e^{-1},+\infty\right[$.

Dans toute la suite du sujet, on note W sa bijection réciproque.

(b) Propriétés de la fonction W

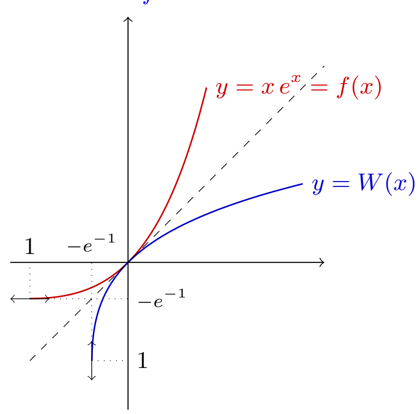
$W(x)=$ c'est l'unique solution ......
W réalise une bijection de $\left[-e^{-1},+\infty\right[$ sur $[-1,+\infty[$.
Comme f est croissante, on sait que W est croissante
Comme f n'est ni paire, ni impaire, la fonction W n'est ni paire, ni impaire

Calculer $W(0)$ et $W(e)$.

$W(0)$ c'est l'unique solution dans $\left[-e^{-1},+\infty\right[$ de l'équation $f(x)=0 \iff x\,e^x=0$
Or 0 est une solution évidente donc (à cause de l'unicité) on a $W(0)=0$

De même, on a $W(e)=1$

Faire sur un même dessin les graphes des fonctions f est W.



(c) Justifier la grande propriété de la fonction W, CàD $\forall\, x\in$ `à préciser`, $W(x)\,e^{W(x)}=x$

Pour tout/chaque $b\in[-1,+\infty[$, sait que $W(b)$ est une solution de l'équation $f(x)=b$
Donc $\forall\, b\in[-1,+\infty[\,,\ f\Big(W(b)\Big)=b \iff W(b).e^{W(b)}=b$

(d) Donner les ensemble $\mathscr{D}$ de définition/continuité et $\mathscr{D}'$ de dérivabilité de la fonction W

Comme la fonction f est continue, la fonction W est continue sur $\mathscr{D}=\left[-e^{-1},+\infty\right[$
Comme la fonction f est dérivable, la fonction W est dérivable sur $\mathscr{D}'=\left]-e^{-1},+\infty\right[$

Justifier (en utilisant Q1c) que : $\forall\, x\in\mathscr{D}'$ *et* $x\neq 0,\ W'(x)=\dfrac{W(x)}{x\Big(1+W(x)\Big)}$

On dérive l'égalité de la question Q1c, ainsi $\forall\, x\in\mathscr{D}'$ *et* $x\neq 0$

$$\begin{aligned}
&W'(x)\,e^{W(w)}+W(x)\,W'(x)\,e^{W(w)}=1\\
&\iff W'(x)e^{W(w)}\left[e^{W(w)}+1\right]=1\\
&\iff W'(x)=\frac{1}{e^{W(w)}\left[e^{W(w)}+1\right]}\\
&\iff W'(x)=\frac{W(w)}{x\left[e^{W(w)}+1\right]} \qquad \textit{car } W(x).e^{W(x)}=x
\end{aligned}$$

(e) On va démontrer que : $\dfrac{W(x)}{\ln(x)}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$

i. Justifier que pour tout $x>0, W(x)=\ln(x)-\ln(W(x))$.

Comme W est croissante et $W(0)=0$, On a $\forall x>0,\ W(x)e^{W(x)}=x>0$

J'applique la fonction $\ln$, ainsi $x>0, W(x)=\ln(x)-\ln(W(x))$.

ii. En déduire que : pour tout $x>e,\ 0\leqslant \ln(W(x))\leqslant \ln(\ln(x))$.

Comme W est croissante et $W(e)=1$, On a $\forall x>e,\ \ln(W(x))>\ln(1)=0$

et de plus $\forall x>e,\ W(x)=\ln(x)-\ln(W(x))\leqslant \ln(x)-\mathscr{O}$

On applique la fonction $\ln$ car tout est >0 on a bien $x>e,\ \ln(W(x))\leqslant \ln(\ln(x))$.

iii. Déduire des deux question précédente un encadrement de $\dfrac{W(x)}{\ln(x)}$.

Pour tout/chaque $x>e$, on a : $W(x)=\ln(x)-\ln(W(x))$ et on fait W en utilisant la question précédente ainsi

$$\ln(x)-\ln(\ln(x))\leqslant \underbrace{\ln(x)-\ln(W(x))}_{=W(x)}\leqslant \ln(x)-\mathscr{O}$$

Conclusion : $\forall x>e,\ 1-\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\leqslant \dfrac{W(x)}{\ln(x)}\leqslant 1$

Conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{W(x)}{\ln(x)}=1$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}=\lim_{\square\to\infty}\frac{\ln(\square)}{\square}=0$

Conclusion : Le théorème des 2 gendarmes assure que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{W(x)}{\ln(x)}=1$.

2. La fonction V

(a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ sur $\left[-e^{-1},0\right[$.

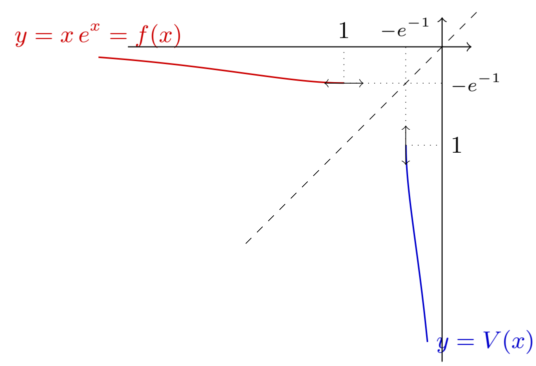
La fonction f est continue et strictement dé-croissante

Donc f réalise une bijection de $[-\infty,-1]$ sur $\left[-e^{-1},0\right[$.

(b) Propriétés de la fonction V

Propriétés élémentaires : $V(x)=\cdots$, Bij de ... sur ..., monotonie, parité.

Faire sur un même dessin les graphes des fonctions f est V.

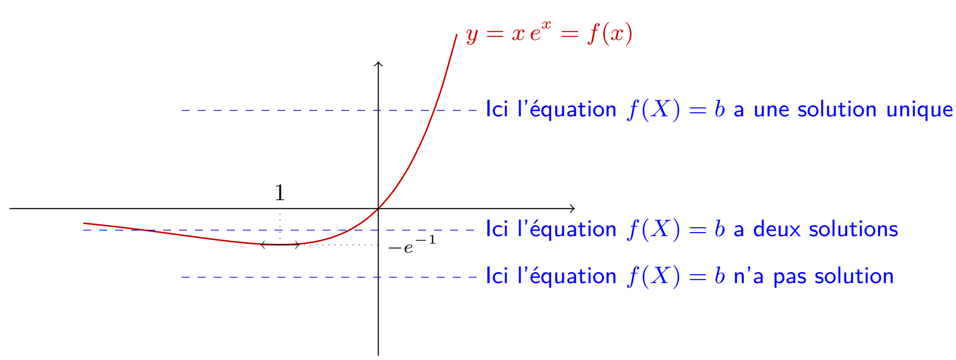


3. Les équations $f(x)=\beta \iff x\,e^{x}=\beta$

Faites le graphe de la fonction f

Discuter selon les valeurs $\beta\in\mathbb{R}$ le nombre de solution de l'équation $f(X)=\beta$

et exprimer les solutions à l'aide des fonctions W et V



> Si/Lorsque $\beta \geqslant 0$, l'équation $f(X)=\beta$ admet une unique solution
  Et on a : $f(X)=\beta \iff X=W(\beta)$

> Si/Lorsque $\beta \in \left]0,-e^{-1}\right[$, l'équation $f(X)=\beta$ admet 2 solutions
  Et on a : $f(X)=\beta \iff X=W(\beta)$ ou $X=V(\beta)$

> Si/Lorsque $\beta=-e^{-1}$, l'équation $f(X)=\beta$ admet 1 solutions
  Et on a : $f(X)=-e^{-1} \iff X=W(-e^{-1})=V(-e^{-1})=1$

> Si/Lorsque $\beta<-e^{-1}$, l'équation $f(X)=\beta$ n'a pas de solution

4. Application d'une autre équation

   On considère a et b deux réels non nuls, et $c \in \mathbb{R}$.
   On s'intéresse à l'équation (E) : $ae^x+bx=c$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $ae^x+bx=c \iff \left(-x+\frac{c}{b}\right)e^{-x+\frac{c}{b}}=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{b}}$.

   On a $\left(-x+\frac{c}{b}\right)e^{-x+\frac{c}{b}}-\frac{a}{b}=e^{\frac{c}{b}} \iff$ *On ré-organise* $\iff ae^x+bx=c$

   En déduire comment on pourrait résoudre l'équation (E)

   $$\text{On a } ae^x+bx=c \iff \left(-x+\frac{c}{b}\right)e^{-x+\frac{c}{b}}=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{b}}$$
   $$\iff \begin{cases} f(Y)=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{b}} & (A) \\ Y=-x+\frac{c}{b} & (B) \end{cases}$$

   On résout (A) en utilisant Q3 et discutant selon la valeur de $\frac{a}{b}e^{\frac{c}{b}}$
   Puis on résout (B)

5. Application d'une autre-autre équation

   Soit $x>0$. Justifier qu'il existe un unique réel $z \in \mathbb{R}$ tel que $x=e^{-z}$.

   La fonction $h : t \longmapsto e^{-t}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   Comme $x>0$, l'équation $h(t)=x$ admet une unique solution,
   ainsi il existe un unique réel $z \in \mathbb{R}$ tel que $x=e^{-z}$.

   En déduire, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, comment on pourrait résoudre l'équation l'équation $\frac{x}{\ln(x)}=\lambda$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.

   $$\text{On a On a } \frac{x}{\ln(x)}=\lambda \iff \begin{cases} x=e^{-z} \\ \frac{e^{-z}}{\ln\left(e^{-z}\right)}=\lambda \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} x=e^{-z} \\ \frac{1}{-ze^{z}}=\lambda \end{cases}$$
   $$\iff \begin{cases} x=e^{-z} \\ f(z)=\frac{-1}{\lambda} \end{cases}$$

   On résout l'équation $f(z)=\frac{-1}{\lambda}$ en utilisant Q3 et discutant selon la valeur de $\frac{-1}{\lambda}$.

Solution de l'exercice 3 **(Énoncé)**

1. Comme $g \circ f \circ g = f$ et f est injective donc g est injective.
2. On a $f = g \circ f \circ g = [f \circ g \circ f] \circ f \circ g = f \circ g \circ f \circ f \circ g$.
   Cette égalité signifie que :
   $$\forall e \in E,\ f(e)=[f \circ g \circ f \circ f \circ g](e)=f([g \circ f \circ f \circ g](e))$$
   c'est une égalité de la forme $f(\square)=f(\square')$

   On applique la définition de f injective avec $\square=e$ et $\square'=[g \circ f \circ f \circ g](e)$

   Ainsi $\forall e \in E,\ e=[g \circ f \circ f \circ g](e)$
3. Comme $\forall e \in E,\ e=[g \circ f \circ f \circ g](e)$,

   on a donc $g \circ f \circ f \circ g = id_E$

   Ainsi $g \circ f \circ f \circ g = id_E$ et id_E est bijective donc g est surjective ! ! !

   Ainsi g est surjective et injective, g est donc bijective.

   On termine facilement avec $f \circ g \circ f = g$ et g bijective donc f est surjective.