TD 10 Suite.

Mercredi 26 Novembre 2025.

Exercice 1. Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

Monotonie

Les filles : Étudier la monotonie de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et admettre l'autre)

Les Garçons : Étudier la monotonie de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et admettre l'autre)

Montrer que les suites (G_n) et (F_n) sont adjacentes.

Exercice 2. [Correction] Soit les suites (c_n) et (s_n) définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \cos(n)$ et $s_n = \sin(n)$

1. On va démontrer que la suite (c_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

   On fait un R.A. *On suppose que la suite (c_n) converge vers ℓ, i.e.* $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculer $c_{n+1} - c_{n-1}$ en fonction de $\sin(n)$

   En déduire $\sin n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (On admet que $\sin 1 \neq 0$).

   (b) Simplifier $s_{n+1} - s_{n-1}$. En déduire la valeur de ℓ.

   (c) Trouver une contradiction. Conclure.

2. Démontrer que la suite (c_n) ne diverge pas vers $\pm\infty$

Conclusion : la suite (c_n) est chaotique.

Exercice 3. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$.
2. On suppose que $\ell > 0$

   Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire une absurdité.
3. Que peut-on conclure ?

Exercice 4. [Correction] Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad \textit{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

On considère la suite complexe de terme général $z_n = x_n + i\, y_n$.

1. Calculer z_{n+1} en fonction z_n.
2. Les suites (z_n), (x_n), (y_n) convergent-elle ?

Exercice 5. [Correction] Soit les suites (c_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \cos(n)$

On va démontrer avec un RA que la suite (c_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

On suppose que la suite (c_n) converge vers ℓ, CàD $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = 2\cos(1)\, c_{n+1} - c_n$

   En déduire que $\ell = 0$.
2. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{2n} = 2\, c_n^2 - 1$

   En déduire une absurdité

Exercice 6. [Correction] Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_1 > 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2^n} u_n.$$

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Majorée ?
   (a) Trouver (en utilisant les question 1. et 2.), une majoration du type $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant K_n\, u_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est majorée puis qu'elle converge.

Exercice 7. [Correction] Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $0 < u_0 < v_0$

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \quad \textit{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et que $\forall\, n,\quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
2. Convergence de (u_n) et de (v_n) .

   Étudier la monotonie des suites.
   Les suites convergent-elles ?

   On note u et v les limites respective de (u_n) et (v_n).
3. On considère la suite (Δ_n) définie par $\Delta_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que (Δ_n) est constante.
   (b) En déduire que $v \underset{\text{Strict}}{>} 0$.
   (c) Montrer que $u = 0$ et $v = v_0 - u_0 > 0$.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) Un exo sympa.

1. Calculer $c_{n+1} - c_{n-1}$ en fonction de $\sin(n)$. En déduire $\sin n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. (On admet que $\sin 1 \neq 0$).

   On a

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_{n-1} = \cos(n+1) - \cos(n-1) &= \cos(a+b) - \cos(a-b) \\ &= -2\sin a \sin b \\ &= -2.\sin n.\sin 1 \end{aligned}$$

   Comme $\sin 1 \neq 0$, on a

$$s_n = \sin n = \frac{\cos(n+1) - \cos(n-1)}{-2\sin 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ell - \ell}{-2\sin 1} = 0$$

2. Simplifier $s_{n+1} - s_{n-1}$. En déduire la valeur de ℓ.

   On a
   $s_{n+1} - s_{n-1} = \sin(n+1) - \sin(n-1) = ... = 2\sin 1 \cos n.$
   Ainsi

$$\cos n = \frac{\sin(n+1) - \sin(n-1)}{2\sin 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0-0}{-2\sin 1} = 0$$

   On a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc par unicité de la limite $\ell = 0$

3. Trouver une contradiction. Conclure.

   Or on sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$,
   On regarde ce que devient la relation quand $n \to \infty$, CàD

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad c_n^2 + s_n^2 = \cos^2(n) + \sin^2(n) = 1 \\ c_n^2 + s_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^2 + 0^2 \\ 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

   À la limite, quand $n \to \infty$, la relation devient $0^2 + 0^2 = 1$ OUS

   Conclusion : La suite (c_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que la suite (c_n) ne diverge pas vers $\pm\infty$

   Comme $c_n = \cos n \in [-1, 1]$, on ne peut pas avoir $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pm\infty$.
   Conclusion : la suite est chaotique.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } u_{n+1}-u_n &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{2^n}{(n)!}\\ &= \frac{2^n}{(n)!}\left[\frac{2}{n+1}-1\right]\\ &= \frac{2^n}{(n)!}\left[\frac{2-(n+1)}{n+1}\right]=\frac{2^n}{(n)!}\left[\frac{1-n}{n+1}\right]<0 \quad \textit{lorsque } n\geqslant 1\end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du rang $N=1$

Conclusion : Lsa suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 (évident tout est positif) donc elle converge vers $\ell \geqslant 0$

2. On suppose que $\ell > 0$. Simplifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. En déduire une absurdité.

On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{(n)!}}=\dfrac{2}{n+1}$

On regarde ce que devient la relation quand $n\to\infty$, CàD

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2}{n+1}\\[2ex] \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{\ell}{\ell\neq 0}=1\\ \dfrac{2}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\end{array}\right\}\Longrightarrow \text{À la limite, quand } n\to\infty, \text{ la relation devient } 1=0 \text{ OUS}$$

3. Que peut-on conclure ?

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$ et $\ell > 0$ est absurde.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Calculer z_{n+1} en fonction z_n.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} + i\frac{x_n + y_n}{2} = (x_n + iy_n)\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) z_n$$

2. La suite (z_n) est une suite géo de raison $r = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$, ainsi on a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ z_n = z_0\, r^n = z_0 \left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^n$.

   `On sait/On devine`

   $>$ Dans $\mathbb{R}$ une suite géo converge vers 0 Ssi $-1 < r < 1 \iff |r| < 1$

   $>$ Dans $\mathbb{C}$ une suite géo converge vers 0 Ssi $|r| < 1$

   Ici $\left|\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

   la suite (z_n) converge vers $\ell = 0$.

   De plus $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ donc (on admet) $x_n = \mathrm{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{Re}(\ell) = \mathrm{Re}(0) = 0$

   et de même $y_n = \mathrm{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{Im}(\ell) = \mathrm{Im}(0) = 0$

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = 2\,\cos(1)\,c_{n+1} - c_n$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$2\,\cos(1)\,c_{n+1} = 2\,\cos(1)\cos(n+1) = 2C_aC_b = \cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos(n+2) + \cos(n)$$

   Donc on a bien $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = 2\,\cos(1)\,c_{n+1} - c_n$

   En déduire que $\ell = 0$.

   On regarde ce que devient la relation quand $n \to +\infty$
   $$\left.\begin{array}{r} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} = 2\,\cos(1)\,c_{n+1} - c_n \\ \\ c_{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ 2\,\cos(1)\,c_{n+1} - c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\,\cos(1)\,\ell - \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{À la limite, quand } n \to \infty, \\ \quad \text{on a } \ell = 2\,\cos(1)\,\ell - \ell \end{array}$$

   On a ré-organise, ainsi $\ell = 2\,\cos(1)\,\ell - \ell$
   $$\iff \ell\,[2 - 2\cos(1)] = 0$$
   $$\iff \ell = 0 \quad \textit{car } 2 - 2\cos(1) \neq 0$$

2. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{2n} = 2\,c_n^2 - 1$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$c_{2n} = \cos(2n) = \cos(n+n) = \cdots = 2\cos^2(n) - 1 = 2\,c_n^2 - 1$$

   En déduire une absurdité

   On regarde ce que devient la relation quand $n \to +\infty$

   Ainsi (`je zappe la rédaction avec l'accolade`) on a : $\ell = 2\ell^2 - 1 \iff \ell = 1$ ou $\ell = {}^{-1}/_{2}$

   C'est oups car $0 \neq 1$ et $0 \neq {}^{-1}/_{2}$

   Conclusion : la suite (c_n) ne converge pas vers dans $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leqslant e^x$.

   Convexité

   .

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   Pour tout/chaque $n \in \mathbb{N}$, on remarque : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} u_{n-1}$

   `Donc le signe de` $u_{n+1} - u_n$ `se déduit de celui de` u_{n-1}

   On montre facilement par une récurrence à 2 étages que $H_{<n>} : u_n \geqslant 0$.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} u_{n-1} \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

3. Majorée ?

   (a) Trouver (en utilisant les question 1. et 2.), une majoration du type $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant K_n\, u_n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{2^{n-1}} u_{n-1} \\
&\leqslant u_n + \frac{1}{2^{n-1}} u_n \qquad \textit{car la suite est croissante} \\
&\leqslant u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&\quad \textit{on utilise Q1. avec } x = e^{1/2^{n-1}} \\
&\leqslant u_n \underbrace{e^{1/2^{n-1}}}_{K_n}
\end{aligned}$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) est majorée puis qu'elle converge.

   On a "À la mode géo"
$$\begin{aligned}
u_n &\leqslant K_{n-1} u_{n-1} \\
&\leqslant K_{n-1} K_{n-2} u_{n-2} \\
&\ \ \vdots \\
&\leqslant K_{n-1} K_{n-2} \cdots K_0\, u_0
\end{aligned}$$

   De plus $K_{n-1}K_{n-2}\cdots K_0 = \exp\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = \exp\left(\dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{1-0}{1-\frac{1}{2}}\right) = e^2$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant e^2\, u_0$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $e^2 u_0$
donc elle converge vers $\ell \leqslant e^2 u_0$.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et que $\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

   On démontre par récurrence

$$H\langle n\rangle : |u_n \text{ et } v_n \text{ se calculent et } \forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

2. Convergence.

   Étudier la monotonie des suites.

$$\text{Pour tout } n \in^{\mathbb{N}},\ u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - u_n \quad \text{ET} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} - v_n$$
$$= \frac{-u_n v_n}{u_n + v_n} < 0. \qquad = \frac{-u_n v_n}{u_n + v_n} < 0.$$

   Les suites convergent-elles ?

   Ainsi les deux suites (u_n) et (v_n) sont décroissantes, minorées par 0
   donc elles convergent vers $u \geqslant 0$ et $v \geqslant 0$.

3. Calcul de u et v

   (a) Montrer que (Δ_n) est constante.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \Delta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - \frac{v_n^2}{u_n + v_n}$$
$$= \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n}$$
$$= \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{u_n + v_n}$$
$$\text{on simplifie } u_n + v_n > 0$$
$$= u_n - v_n = \Delta_n$$

   Conclusion : la suite (Δ_n) est constante.

   (b) En déduire que $v \underset{\text{Strict}}{>} 0$.

   D'une part : la suite (Δ_n) est constante et égale à $\Delta_0 = u_0 - v_0$
   donc la suite (Δ_n) converge vers $\Delta_0 = u_0 - v_0$

   D'autre part : $\Delta_n = u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u - v$

   Par unicité de la limite, on a : $u - v = \Delta_0$

   Conclusion : $v = u - \Delta_0 > 0$ car $u \geqslant 0$ et $\Delta_0 = u_0 - v_0 < 0$

   (c) Montrer que $u = 0$ et $v = v_0 - u_0 > 0$.

   On regarde les relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n}$ à la limite quand $n \to \infty$

   On obtient $u = \dfrac{u^2}{u+v}$ et $v = \dfrac{v^2}{u+v}$ C'est légitime/valise car $u + v > 0$

   On ré-organise : $v = \dfrac{v^2}{u+v} \iff uv + v^2 = v^2 \iff uv = 0$
   De plus $v > 0$ donc $v \neq 0$

   Conclusion : $u = 0$ et $v = u - \Delta_0 = 0 - (u_0 - v_0) = v_0 - u_0 > 0$