Exercice 1. On considère $A = 0,123123123123\dots$

1. On admet que le nombre A est correctement défini et que les manipulations intuitives sur A sont valides.

   Exprimer $1000 \times A$ en fonction de A.

   En déduire l'expression de A sous la forme d'une fraction irréductible d'entiers (CàD une fraction non simplifiable).

2. Détermination de A avec une somme géométrique

   $$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \text{ on considère } A_n = 0,\underbrace{\underbrace{123}\underbrace{123}\dots\underbrace{123}}_{n\,fois}$$

   Écrire A_n à l'aide d'une somme

   En déduire que la suite (A_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 2. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{n^2\, u_n}{n^2 + u_n}$$

1. Question préliminaire. On considère la suite (Sn) et (T_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$

   Montrer que le suites (Sn) et (T_n) sont adjacentes.

   Ainsi elles convergent vers la même limite L et on admet que $L = \pi^2/6$.

2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0 \leqslant \ell < 1$
4. Calcul de ℓ

   Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n^2}$

   En déduire que : $\forall\, n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{u_n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^2}$

   Déterminer ℓ

Exercice 3. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 = 2 \quad et \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^2 + 2}{2u_n}$$

1. Étudier, sur $\mathbb{R}_+$, les fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+2}{2x}$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\sqrt{2}, 2]$
3. Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$. `Conclusion : le nombre` u_n `se rapproche de` $\sqrt{2}$
5. Étude de $d_n = \left|u_n - \sqrt{2}\right|$
   (a) Démontrer que la fonction f est k-lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, 2]$ avec $0 < k < 1$
   (b) En déduire que : $d_n = \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant k^n$. `Conclusion : le nombre` u_n `se rapproche vite de` $\sqrt{2}$
6. On considère pour tout n, $\varepsilon_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$
   (a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \varepsilon_{n+1} \leqslant (\varepsilon_n)^2$
   (b) On admet que $u_1 = {}^3/_2$ et que $\varepsilon_1 = \dfrac{u_1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{10}$.
   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{10^{2^{n-1}}}$ `Conclusion : le nombre` u_n `se rapproche très très vite de` $\sqrt{2}$

— Exercices plus difficiles facultatifs —

Exercice 4. [Correction] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$
   Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
   En déduire que la suite (x_n) converge vers $\ell \leqslant 1$.
3. Calcul de ℓ
   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_n \leqslant {}^1/_{\sqrt{2}}$.
   En déduire que $(x_n)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
   Que devient l'égalité $f_n(x_n) = 0$, quand $n \to \infty$?
   En déduire la valeur de ℓ

Exercice 5. [Correction] Étude de la suite $[\sin(n!\pi e)]_{n\in\mathbb{N}}$.

On sait/admet que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers e

1. Soit n et k deux entiers fixés quelconques.
   (a) Montrer que : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \leqslant \dfrac{1}{n}$
   (b) Simplifier puis encadrer $S_{n+k} - S_n$.
   (c) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{n!\ (n+1)} \leqslant e - S_n \leqslant \dfrac{1}{n!\, n}$
2. Montrer qu'il existe une suite d'entier (k_n) et une suite (ε_n) avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n!e = k_n + \varepsilon_n$$

   En déduire que la suite $[\sin(n!\pi e)]_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Montrer que le suites (Sn) et (T_n) sont adjacentes.

   Facile

   Conclusion : Ainsi elles convergent vers la même limite L et on admet que $L = \pi^2/6$.

2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$

   On fait par récurrence $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule et $u_n > 0$ $H_{<0>}$ est vraie

   Hérédité : On suppose $H_{<n>}$

   Comme $u_n > 0$, le nombre $u_{n+1} = \dfrac{n^2\, u_n}{n^2 + u_n}$ se calcule car $u_n > 0$ donc $n^2 + u_n > 0$

   De plus $u_{n+1} = \dfrac{n^2\, u_n}{n^2 + u_n} > 0$ car tout est positif.

   Conclusion : $H_{<n+1>}$ est vraie

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0 \leqslant \ell < 1$

   On va utiliser le théorème croissante majorée

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2\, u_n}{n^2 + u_n} - u_n = \dfrac{-u_n^2}{n^2 + u_n} < 0$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante et minorée par 0. elle converge vers $\ell \geqslant 0$

   De plus bonus : $0 \leqslant \cdot \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant u_2 < u_1 = 1$

   Conclusion : La suite converge vers $\ell \geqslant 0$ et $\ell < 1$

4. Calcul de ℓ

   Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n^2}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{aligned}\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} &= \frac{n^2 + u_n}{n^2\, u_n} - \frac{1}{u_n}\\ &= \frac{n^2 + u_n - n^2}{n^2\, u_n}\\ &= \frac{u_n}{n^2\, u_n} = \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

   En déduire que : $\forall\, n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{u_n} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$

   On somme l'inégalité précédente de $k = 1$ à $k = n - 1$ et on télescope

   Déterminer ℓ

   On ordredeGrandeur la relation $\dfrac{1}{u_n} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ quand $n \to \infty$

   $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{u_n} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}\\ \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{\ell \neq 0}\\ 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + \dfrac{\pi^2}{6}\end{array}\right\} \implies \text{Conclusion : } \frac{1}{\ell} = 1 + \frac{\pi^2}{6}$$

   Ainsi $\ell = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\pi^2}{6}} = \dfrac{6}{\pi^2 + 6}$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Étudier, sur $\mathbb{R}_+$, les fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+2}{2x}$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\sqrt{2}, 2]$

   On fait par récurrence $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule et $u_n \in [\sqrt{2}, 2]$

   $H_{<0>}$ est vraie
   Hérédité : On suppose $H_{<n>}$
   Comme $u_n \geqslant \sqrt{2} > 0$, le nombre $u_{n+} = f(u_n)$ se calcule
   De plus

   $$\left.\begin{array}{r}\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2\\ \text{La fonction } f \text{ est croissante sur } [\sqrt{2}, 2]\end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(\sqrt{2})}_{\sqrt{2}} \leqslant f(u_n) \leqslant \underbrace{f(2)}_{=3/2<2}$$

   Conclusion : $H_{<n+1>}$ est vraie
3. Déterminer les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Comme $\forall\, n\, u_{n+1} = f(u_n)$ et $f : t \longmapsto f(t) = \dfrac{t^2+2}{2t}$ continue

   donc on sait que les limites ℓ possibles de la suite vérifient vérifient l'équation $\ell = f(\ell)$.

   On résout
   $$\begin{aligned}\ell &= f(\ell)\\ \Longleftrightarrow\ h(\ell) &= 0\end{aligned}$$

   La question Q1 et le théorème de la bijection monotone assurent que
   l'unique solution de l'équation $h(\ell) = 0$, c'est $\ell = \sqrt{2}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

   $>$ On a : $u_1 - u_0 = f(u_0)u_0 = h(u_0) = h(2) < 0$ (d'après la question Q1)
   $>$ On fait par récurrence $H_{<n>}$: $u_{n+1} - u_n$
   La proposition $H_{<0>}$ est vraie
   Hérédité : On suppose $H_{<n>}$. On va montrer $H_{<n+1>}$

   $$\left.\begin{array}{r}\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2\\ \text{La fonction } f \text{ est croissante sur } [\sqrt{2}, 2]\end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}$$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante.

   Conclusion : La suite est décroissante, minorée par $\sqrt{2}$ donc elle converge vers $\ell \geqslant \sqrt{2}$
   De plus, il n'y a qu'un seule limite possible, donc la suite $_un$ converge vers $\ell = \sqrt{2}$.
5. Étude de $d_n = \left|u_n - \sqrt{2}\right|$
   (a) Démontrer que la fonction f est k-lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, 2]$ avec $0 < k < 1$

   $>$ La fonction f est dérivable sur $[\sqrt{2}, 2]$.

   $$> \forall\, t \in [\sqrt{2}, 2],\ \left|f'(t)\right| = \left|\frac{-x^2+2}{2x^2}\right|$$
   $$= \frac{x^2-2}{2x^2} \quad \text{car } -x^2+2 < 0 \text{ sur } [\sqrt{2}, 2]$$
   $$\leqslant \frac{2^2-2}{2(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

   Donc d'après le TAF, la fonction f est $^1/_2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, 2]$

   (b) En déduire que : $d_n = \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant k^n$.

   La fonction f est $^1/_2$ -lipschitzienne sur $[\sqrt{2}, 2]$
   donc $\forall\, x, x' \in [\sqrt{2}, 2],\ \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|x - x'\right|$.

   On applique l'inégalité avec $x = u_n \in [\sqrt{2}, 2]$ et $x' = \sqrt{2}$

Ainsi on a $\underbrace{\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|}_{=d_{n+1}} \leqslant k \underbrace{\left|u_n-\sqrt{2}\right|}_{=d_n}$

On finit à la mode géo

$$\begin{aligned}
d_n &\leqslant k\, d_{n-1} \\
&\leqslant k\ [k\, d_{n-2}] \\
&\leqslant k.k.\, [k\, d_{n-3}] \\
&\vdots \\
&\leqslant k.k....k\, [k\, d_0] = k^n\, d_0 \leqslant k^n
\end{aligned}$$

6. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \varepsilon_{n+1} \leqslant (\varepsilon_n)^2$

   On a que : $\forall\, n,\ u_n \geqslant \sqrt{2}$ donc $\forall\, n,\ \varepsilon_{n+1} \geqslant 0$. de plus

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\dfrac{(u_n)^2+2}{2u_n}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{(u_n)^2+2-2\sqrt{2}\,u_n}{2u_n\, 2\sqrt{2}} = \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{4\sqrt{2}\,u_n} \leqslant \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{4\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \left(\frac{u_n-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = (\varepsilon_n)^2
\end{aligned}$$

   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{10^{2^{n-1}}}$

   Récurrence

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$

   La fonction f_n est continue et strictement croissante (facile)

   Le tableau de variation et le thm de la bijection monotone assure que

   l'équation $f_n(X) = 0$ admet une unique solution, notée x_n, dan $[0,1]$

   Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $f_{n+1}(x_n) < 0$.

   On a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) = (x_n)^{n+1} + 2\,(x_n)^2 + x - 1 &= (x_n)^{n+1} + \underbrace{(x_n)^n + 2\,(x_n)^2 + x - 1}_{=f_n(x_n)=0} - (x_n)^n \\ &= (x_n)^{n+1} - (x_n)^n \\ &= (x_n)^n\,[x_n - 1] \leqslant 0 \quad \textit{car } x_n \in [0,1] \end{aligned}$$

   En déduire que la suite (x_n) est croissante, puis qu'elle converge vers ℓ.

   On a : $f_{n+1}(x_n) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ et f_{n+1} est croissante, donc $x_n \leqslant x_{n+1}$

   Ainsi la suite (x_n) est croissante et majorée par par 1, car $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \in [0,1]$

   Donc la suite (x_n) converge vers $\ell \leqslant 1$

3. Calculer $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et vérifier que $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$,.....

   On a $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \underbrace{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}_{=1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$

   Ainsi $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0 = f_n\,(x_n)$ et f_n est croissante

   donc $0 < x_n < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   On en déduit que : $0^n \leqslant (x_n)^n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Donc $(x_n)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (thm des gendarmes).

   On regarde ce que devient égalité $f_n(x_n) = (x_n)^n + 2\,(x_n)^2 + x_n - 1 = 0$, quand $n \to \infty$,

$$\left.\begin{array}{r} f_n(x_n) = (x_n)^n + 2\,(x_n)^2 + x_n - 1 = 0 \\ \textit{Gauche} = (x_n)^n + 2\,(x_n)^2 + x_n - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + 2\ell^2 + \ell - 1 \\ \textit{Droite} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \textit{À la limite} 0 + 2\ell^2 + \ell - 1 = 0$$

   Or $2\ell^2 + \ell - 1 = 0 \iff$ *Calcul de* $\Delta \iff \ell = -1$ *ou* $\ell = {}^1/_2$

   Conclusion : Comme $x_n \in [0,1]$, on a $\ell \in [0,1]$,

   Donc la suite (x_n) converge vers $\ell = \dfrac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. (a) Montrer que : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \leqslant \dfrac{1}{n}$

   On s'intéresse à la majoration

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \leqslant$$

$$\leqslant \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+1)\ldots(n+1)}$$

$$\leqslant \quad \square + \square^2 + \ldots + \square^k \quad \textit{avec } \square = {}^1/{n+1}$$

   Somme géo.......A Finir

   (b) Simplifier puis encadrer $S_{n+k} - S_n$.

   On a

$$S_{n+k} - S_n = \sum_{p=n+1}^{n+k} \frac{1}{p!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right]$$

   d'où $\dfrac{1}{n!\ (n+1)} \leqslant S_{n+k} - S_n \leqslant \dfrac{1}{n!\,n}$

   (c) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{n!\ (n+1)} \leqslant e - S_n \leqslant \dfrac{1}{n!\,n}$

   On OrdreGrandeur la relation précédente avec $k \longrightarrow +\infty$.

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{n!\ (n+1)} \leqslant S_{n+k} - S_n \leqslant \dfrac{1}{n!\,n} \\ S_{n+k} - S_n \xrightarrow[k\to\infty]{} \ell - S_n \\ \dfrac{1}{n!\ (n+1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{1}{n!\ (n+1)} \\ \dfrac{1}{n!\,n} \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{1}{n!\,n} \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{À la limite} \frac{1}{n!\ (n+1)} \leqslant e - S_n \leqslant \frac{1}{n!\,n}$$

2. Montrer qu'il existe une suite d'entier (k_n) et une suite (ε_n) avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ n!e = k_n + \varepsilon_n$

   > On remarque que $n!e = k_n + \varepsilon_n \Leftrightarrow \varepsilon_n = n!\,e - k_n$.

   > Ca ressemble à $n!\,(e - S_n) = n!\,e - n!\,S_n$

   et on sait que $n!\,S_n = n!\left[1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right] \in \mathbb{N}$

   on choisit $\boxed{k_n := n!\,S_n \in \mathbb{N}}$ et $\boxed{\varepsilon_n = n!\,(e - S_n)}$

   > On a bien $n!e = k_n + \varepsilon_n$ et avec de l'encadrement précédent,

   on a $\dfrac{1}{(n+1)} \leqslant n!\,(e - S_n) \leqslant \dfrac{1}{n}$, ainsi on a bien $\varepsilon_n = n!\,(e - S_n) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

3. Conclure que la suite $[\sin(n!\pi e)]_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

$$\text{Finalement } \sin(n!\pi e) = \sin(\pi k_n + \pi\varepsilon_n) \overset{\text{Trigo}}{=} \pm \underbrace{\sin(\pi\varepsilon_n)}_{\to +0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin 0 = 0$$