TD 11 Suite.

Mercredi 03 Décembre 2025.

Exercice 1. [Correction] Soit $\alpha > 0$. On considère la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^\alpha}{2^n}$

L'objectif est de montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1. Démonstration 1 :
   (a) Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n$
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_0
   En déduire qu'elle converge vers $\ell \geqslant 0$
   (c) Démontrer que $\ell = 0$
2. Démonstration 2 :
   (a) Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n$
   (b) Fabriquer, à l'aide de la question Q1, une majoration du nombre u_n
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Exercice 2. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 = f(u_n)$$

1. Étudier les fonctions $f : x \longmapsto f(x)$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).
3. On suppose que $u_0 = 0$. Calculer $u_1, u_2, \ldots$. Conclure.
4. On suppose que $u_0 \in]0, 1]$
   (a) Montrer que : $\forall \geqslant 1,\ u_n \in [0, 1]$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Que peut-on conclure ?
5. On suppose que $u_0 \notin [0, 1]$
   (a) Montrer que $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 < 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

Plus difficile

Exercice 3. [Correction] Soit (u_n) la suite définie par : $u_1 = 1$ et $\forall\, n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n}$

1. Montrer que la suite (u_n) est définie, que $\forall n,\ u_n \geqslant 1$.
2. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).
3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
   (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
   En déduire qu'il existe N_0 tel que $u_{N_0} \geqslant 4$.
   (b) Justifier que : $\sqrt{u_{N_0}} - u_{N_0} < -1$
   En déduire que : $u_{N_0+1} - u_{N_0} \leqslant 0$. Oups
   (c) Expliquer pourquoi on peut en déduire qu'il existe N_1 tel que $u_{N_1+1} - u_{N_1} \leqslant 0$
4. Convergence.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du rang N_1
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
5. Conclure.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) 1. Démonstration 1 :

(a) Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}u_n$

On considère $Q_n = \dfrac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n}$. On a $Q_n = \dfrac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n} = \dfrac{\frac{(n+1)^\alpha}{2^{n+1}}}{\frac{3}{4}\frac{n^\alpha}{2^n}} = \dfrac{4}{3}\dfrac{(n+1)^\alpha 2^n}{n^\alpha 2^{n+1}}$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$$

$$= \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}(1+\mathscr{O})^\alpha = \frac{2}{3}$$

J'applique la def de $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2/3$ avec $\varepsilon = \dfrac{1}{3} > 0$

Ainsi $\exists\, N_0$ tq $\forall\, n \geqslant N_0,\ Q_n \leqslant \ell + \varepsilon = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = 1$

Conclusion : il existe un rang N_0 tel que $Q_n \leqslant 1 \implies u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}u_n$

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_0

Pour $n \geqslant N_0$,

on a $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{3}{4}u_n - u_n = \dfrac{-1}{4}u_n \leqslant 0$ car $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_0

En déduire qu'elle converge vers $\ell \geqslant 0$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_0 et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive

Conclusion : LA suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$

(c) Démontrer que $\ell = 0$

On va OrdreGrandérer

$$\left.\begin{array}{c} \forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}u_n \\ u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \dfrac{3}{4}u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3}{4}\ell \end{array}\right\} \implies \text{À la limite } \ell \leqslant \frac{3}{4}\ell$$

On ré-organise : $\ell \leqslant \dfrac{3}{4}\ell \iff \ell \leqslant 0$

Conclusion : On a $\ell \leqslant 0$ et $\ell \geqslant 0$ donc $\ell = 0$

2. Démonstration 2 :

(a) Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}u_n$

On considère $Q_n = \dfrac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n}$. On a $Q_n = \dfrac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n} = \dfrac{\frac{(n+1)^\alpha}{2^{n+1}}}{\frac{3}{4}\frac{n^\alpha}{2^n}} = \dfrac{4}{3}\dfrac{(n+1)^\alpha 2^n}{n^\alpha 2^{n+1}}$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$$

$$= \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}(1+\mathscr{O})^\alpha = \frac{2}{3}$$

J'applique la def de $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2/3$ avec $\varepsilon = \dfrac{1}{3} > 0$

Ainsi $\exists\, N_0$ tq $\forall\, n \geqslant N_0,\ Q_n \leqslant \ell + \varepsilon = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = 1$

Conclusion : il existe un rang N_0 tel que $Q_n \leqslant 1 \implies u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}u_n$

(b) Fabriquer, à l'aide de la question Q1, une majoration du nombre u_n

On a "à la mode géo" : $u_n \leqslant \dfrac{3}{4}u_{n-1}$

$$\leqslant \frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}u_{n-2}\right]$$

$$\vdots$$

$$\leqslant \frac{3}{4}\cdots\frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}u_{N_0}\right] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N_0} u_{N_0}$$

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Conclusion : on a $\forall\, n \geqslant N_0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \underbrace{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-N_0} u_{N_0}}_{=Konstante}$

Le théorème des 2 gendarmes assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Étudier les fonctions $f : x \longmapsto f(x)$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).

   Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et la fonction f est continue, on sait que les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solution de l'équation $\ell = f(\ell)$

   De plus on a d'après Q1, $\ell = f(\ell) \iff h(\ell) = 0 \iff \ell = 0$

   Conclusion : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est forcément vers $\ell = 0$
3. On suppose que $u_0 = 0$. Calculer $u_1, u_2, \ldots$. Conclure.

   On a $u_1 = f(0) = 0$ et de même $u_2 = 0$ etc ...

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0.
4. On suppose que $u_0 \in]0, 1]$

   (a) Montrer que : $\forall \geqslant 1,\ u_n \in [0, 1]$.

   On fait par récurrence $H_{<n>} : 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

   Initialisation avec $n = 1$

   Comme $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ et que d'après le tableau de variation de f, on a $\forall \times \in [0, 1],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant {}^1/_4$

   Donc $0 \leqslant u_1 = f(u_0) \leqslant {}^1/_4 \leqslant 1$

   Hérédité. C'est le même argument

   Conclusion : $\forall \geqslant 1,\ u_n \in [0, 1]$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Pour tout n, on a : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

   Conclusion : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante.

   (c) Que peut-on conclure ?

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \geqslant 0$

   De plus la seule limite possible c'est 0

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0$
5. On suppose que $u_0 \notin [0, 1]$

   (a) Montrer que : $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 < 0$.

   On fait par récurrence $H_{<n>} : u_n \leqslant u_1 < 0$

   Initialisation avec $n = 1$

   Comme $u_0 \notin [0, 1]$ et que d'après le tableau de variation de f, on a $\forall \times \notin [0, 1],\ f(x) < 0$

   Donc $u_1 = f(u_0) < 1$

   Hérédité. C'est le même argument

   Conclusion : $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 < 0$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Pour tout n, on a : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

   Conclusion : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante.

   (c) Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

   Comme $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 < 0$, il n'est pas possible que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ et elle est dé-croissante

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Montrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n > 1$

   On montre par récurrence $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule et $u_n > 1$

   Facile

2. Montrer que : si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite vaut 1.

   On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

   Comme $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n > 1$, on a $\ell \geqslant 1$ et

$$\left.\begin{array}{r}\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1} \\ u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\ell} + \mathcal{O}\end{array}\right\} \textit{À la limite, } \ell = \sqrt{\ell} \implies \ell^2 = \ell \implies \ell = 0 \textit{ ou } \ell = 1$$

   Or $u_n \geqslant 1$ donc $\ell \geqslant 1$. Conclusion : la seule possible c'est $\ell = 1$.

3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Comme la suite est croissante, on a $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n \geqslant u_2 = 2 > 1$.

   Donc la suite ne converge pas vers $\ell = 1$.

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ (car 1 est la seule limite possible) et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

   En déduire qu'il existe N_0 tel que $u_{N_0} \geqslant 4$.

   On applique la définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ avec $A = 4 > 0$

   Ainsi ....

   Justifier que : $\sqrt{u_{N_0}} - u_{N_0} < -1$

$$\text{On a : } G - p = -1 - \sqrt{u_{N_0}} + u_{N_0} = \frac{(u_{N_0}-1)^2 - \left(\sqrt{u_{N_0}}\right)^2}{Bas > 0} = \frac{u_{N_0}^2 - 3u_{N_0} + 1}{Bas > 0}$$

   De plus Si/lorsque $X \geqslant 4$, le trinôme $X^2 - 3X + 1$ est toujours positif

   Conclusion : $\sqrt{u_{N_0}} - u_{N_0} < -1$

   En déduire que : $u_{N_0+1} - u_{N_0} \leqslant 0$. Oups.

   On a maintenant : $u_{N_0+1} - u_{N_0} = \sqrt{u_{N_0}} + \dfrac{1}{N_0} - u_n \leqslant -1 + \dfrac{1}{N_0} < -1 + 1 = 0$

   Conclusion : C'est OUPS car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Expliquer pourquoi on peut en déduire qu'il existe N_1 tel que $u_{N_1+1} - u_{N_1} \leqslant 0$

   L'hypothèse "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante" est absurde

   Donc la négation est vraie, CàD il existe N_1 tel que $u_{N_1+1} - u_{N_1} \leqslant 0$

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du rang N_1

   On montre par récurrence (à partir de N_1)$H_{<n>}$: $u_{n+1} \leqslant u_n$

   Initialisation $n = N_1$

   Fait ci-dessus

   Hérédité : On suppose $H_{<n>}$

   On va montrer $H_{<n+1>}$, CàD $U_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

   On a : $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \dfrac{1}{n+1}$.

   On majore avec $H_{<n>}$ et Wikking

$$\leqslant \underbrace{\sqrt{u_n} + \frac{1}{n + \mathcal{O}}}_{=u_{n+1}}$$

   Donc $Hn+1$ est vraie

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_1

   et minorée par 1

   et la seule limite possible c'est $\ell = 1$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.