TD 11-Bonus Suite .

Mercredi 03 Décembre 2025.

Exercice 1. [Correction] Dans tout le problème, on considère la fonction numérique f de variable réelle définie par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie λ,
   alors λ ne peut prendre que l'une des deux valeurs $\ell_1 < 0$ ou $1 < \ell_2 < 2$.

$$\boxed{\text{On suppose que : } u_0 \in]1, \ell_2[.}$$

2. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ , 1 < u_n < 2$.
3. On considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$.
   (a) Prouver que, pour tout entier naturel, $v_{n+1} = [f \circ f](v_n)$.
   (b) Pour tout réel x, calculer $[f \circ f](x)$ puis déterminer a et b réels tels que, pour tout réel x,
   $$[f \circ f](x) - x = \left(-x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + ax + b\right).$$
   (c) Déterminer les valeurs du réel x telles que $[f \circ f](x) - x = 0$ et le signe de $[f \circ f](x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]1, 2[$.
   (d) Nature de la suite (v_n)
   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \in]1, \ell_2[$
   Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
4. On considère $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{2n+1}$.
   Déterminer le lien entre v_n et w_n.
   En déduire que la suite (w_n) converge et déterminer sa limite.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a

$$\left.\begin{array}{c} u_{n+1}=f(u_n) \\ \textit{la fonction f est continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{r} \textit{Si la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge vers } \ell \\ \textit{Alors on a } \ell=f(\ell) \end{array}$$

   On résout l'équation

$$\ell=f(\ell) \iff \ell=-\ell^2+2\ell+1 \iff \ell^2-\ell-1=0 \iff \ell_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \; ou \; \ell_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. On démontre par récurrence $H_{<n>}$: $1<u_n<2$

   Initialisation : Comme $\ell_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2$, on a bien $1<u_0<2$.
   Hérédité : On suppose $H_{<n>}$ est vraie.

   Comme $f'(x)=-2x+2=2(-x+1)$, la fonction f est décroissante sur $[1,2]$, ainsi on a

$$\left.\begin{array}{c} 1<u_n<2 \\ \textit{la fonction f est décroissante sur } [1,2] \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(2)}_{=1}<\underbrace{f(u_u)}_{=u_{n+1}}<\underbrace{f(1)}_{=2}$$

   Donc $H_{<n+1}$ est vraie

3. Comme f est décroissante sur $[1,2]$ et $\forall\, n,\ u_n\in[1,2]$, on a

$$u_n<u_{n+1} \Longrightarrow u_{n+1}>u_{n+2} \quad et \quad u_n>u_{n+1} \Longrightarrow u_{n+1}<u_{n+2}$$

   La suite n'est donc pas monotone ! ! ! !

4. On considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n=u_{2n}$.

   (a) pour tout n, on a

$$v_{n+1}=u_{2n+2}=f(u_{2n+1})=f(f(u_{2n}))=[f\circ f](u_{2n})=[f\circ f](v_n)$$

   Conclusion : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $v_{n+1}=h(v_n)$ avec $h=f\circ f$

   (b) On a $[f\circ f](x)=-x^4+4x^3-4x^2+2$ et

$$[f\circ f](x)-x=-x^4+4x^3-4x^2-x+2=(-x^2+x+1)(x^2-3x+2)$$

   (c) On a

$$\begin{aligned}[f\circ f](x)-x=0 &\iff (-x^2+x+1)(x^2-3x+2)=0 \\ &\iff -(x-\ell_1)(x-\ell_2)(x-1)(x-2)=0 \\ &\iff x=\ell_1,\ell_2,1 \; ou \; 2.\end{aligned}$$

   Comme $[f\circ f](x)-x=-(x-\ell_1)(x-\ell_2)(x-1)(x-2)$, on a le tableau de signe

x	$-\infty$		ℓ_1		1		ℓ_2		2		$+\infty$
$[f\circ f](x)-x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi on a : Sur $[1,\ell_2]$, $[f\circ f](x)-x\geqslant 0$ et Sur $[\ell_2,2]$, $[f\circ f](x)-x\leqslant 0$.

(d)

Décroissante ? On suit la démarche classique pour les suites récurrentes

> On commence par démontrer par récurrence $H_{<n>} : v_n \in [1, \ell_2]$

C'est facile car comme f est décroissante $[1, \ell_2]$ on sait que $h = f \circ f$ est croissante.

> On ensuite que $u_1 - u_0 = [f \circ f](u_0) - u_0 \leqslant 0$ car $u_0 \in [1, \ell_2]$

> On a $v_{n+1} = h(v_n)$ avec $h = f \circ f$ est croissante sur $[1, \ell_2]$ et pour tout $\forall n,\ v_n \in [1, \ell_2]$ et que $u_1 - u_0 \leqslant 0$,

On démontre facilement par récurrence $H_{<n>} : v_{n+1} \leqslant v_n$,

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissant.

Converge ?

La suite est donc décroissante et minorée par 1

donc elle converge vers $1 \leqslant \ell \leqslant v_0 \leqslant \ell_2$.

Enfin Comme f est continue les limites de la suites (v_n) vérifient l'équation $[f \circ f](\ell) = \ell$ et on a vue que

$[f \circ f](x) = x \iff [f \circ f](x) - x = 0 \iff x = \ell_1, \ell_2, 1\ ou\ 2$

donc la suite (v_n) converge vers 1.

5. On a

$$\left.\begin{array}{c} w_{n+1} = f(v_n) \\ v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ \text{la fonction } f \text{ est continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow w_{n+1} = f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1) = 2$$

donc la suite (w_n) converge vers 2.

6. On a trouvé deux suites extraites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ qui convergent vers 2 limites différentes

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge strictement.