Exercice 1. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\sin(2\,u_n)$$

1. La suite est-elle bien définie ?
   Justifier que $\ell = 0$ est l'unique limite possible de la suite ?
2. On va démontrer par un R.A que la suite ne converge pas vers $\ell = 0$ Sauf exception.
   Dans la suite on suppose que l'on a choisi u_0 afin que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   (a) On admet que : $\dfrac{\sin(\square)}{\square} \xrightarrow[\square\to 0]{} 1$
   Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ |u_{n+1}| \geqslant \dfrac{3}{2}|u_n|$
   (b) En déduire (à la mode géo) une minoration de u_n puis que la suite $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$.
   (c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique.

Exercice 2. [Correction] Soit (u_n) la suite définie par

$$0 < u_1 \leqslant u_2 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{n}u_n.$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. On suppose que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   Comme la suite (u_n) est croissante, on a forcément $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant ... \leqslant u_n \leqslant .... \leqslant \ell$
   (a) Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,$ alors $u_n - u_{n-1} \geqslant \dfrac{\ell}{2n}$
   (b) En déduire une minoration de u_n.
   (c) En déduire une contradiction. Rappel : La suite harmonique (H_n) diverge vers $+\infty$
   Conclusion.

Exercice 3. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{..... + \sqrt{2}}}}} \qquad \text{Il y a } n \text{ symboles } \sqrt{...}$$

On a donc $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$,......

1. Déterminer une fonction f tal que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$

Exercice 4. [Correction]

1. On considère la suite (S_n) définie par
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\; S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}.$$
   (a) Montrer que : $\forall\, k \geqslant 2,\; \dfrac{1}{2k^2} - \dfrac{1}{2(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^3} \leqslant \dfrac{1}{2(k-1)^2} - \dfrac{1}{2k^2}$

   (b) En déduire que la suite (S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

   (c) Encadrement de $(S_n - \ell)$

      i. En utilisant Q1., montrer que pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant n \leqslant p$
$$\frac{1}{2\,(n+1)^2} - \frac{1}{2\,(p+1)^2} \leqslant S_p - S_n \leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2p^2}.$$
      ii. En déduire un encadrement que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\; 0 \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{2\,n^2}$

2. On considère la suite (A_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\; A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$

   (a) Montrer que (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes.

   (b) En déduire que (A_n) converge

      On note a la limite de la suite (A_n)

3. Trouver Lien entre ℓ et a.

   Indication : On remarque que : $S_n = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \text{pair}}}^{n} \ldots + \sum_{\substack{k=1\\ \text{impair}}}^{n} \ldots$ et $A_n = -\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \text{pair}}}^{n} \ldots + \sum_{\substack{k=1\\ \text{impair}}}^{n} \ldots$

   De plus $\displaystyle\sum_{\substack{k=1\\ \text{pair}}}^{n} \ldots$ se calcule ....Yes.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. La suite est-elle bien définie ?

   C'est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \longmapsto f(x) = -\sin(2x)$.
   Comme la fonction f est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, le nombre $u_{n+1} = f(u_n)$ se calcule toujours
   Conclusion la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   Justifier que $\ell = 0$ est l'unique limite possible de la suite.

   Comme la fonction f est continue, on sait que les limites possibles de la suite vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.

   `Méthode classique`

   On remarque que : $\ell = f(\ell) \iff \ell = -\sin(2\ell)$
   $\implies -1 \leqslant \ell \leqslant 1$

   On étudie la fonction $h : x \longmapsto f(x) - x$ sur $[-1, 1]$
   > La fonction h est dérivable et $\forall\, x \in [-1, 1],\ h'(x) = -2\cos(2x) - 1 < 0$
   > D'où le bô tableau.

   Conclusion : Les variation de h et le théorème de la bijection monotone assure que $h(\ell) = 0 \iff \ell = 0$
   Ainsi $\ell = 0$ est l'unique limite possible de la suite

   `Méthode astucieuse`

   On a : $\ell = f(\ell) \iff \ell = -\sin(2\ell)$
   De plus on sait (avec le TAF) que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant |x|$

   Ainsi on a $\ell = -\sin(2\ell) \implies |\ell| = |-\sin(2\ell)| \leqslant 2|\ell|$
   $\implies |\ell| \leqslant 0$
   $\implies \ell = 0$

   Conclusion : $\ell = 0$ est la seule limite possible

2. On va démontrer par un R.A que la suite ne converge pas vers $\ell = 0$ Sauf exception.
   Dans la suite on suppose que l'on a choisi u_0 afin que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   (a) Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ |u_{n+1}| \geqslant \dfrac{3}{2}|u_n|$

   On a

   $$Q_n = \frac{|u_{n+1}|}{\frac{3}{2}|u_n|} = \frac{2}{3}\frac{|\sin(2\,u_n)|}{|u_n|} = \frac{4}{3}\left|\frac{\sin(\square)}{\square}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{3}$$

   > J'applique la def de $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{4}{3}$ avec $\varepsilon = {}^{1}/_{3} > 0$

   $$\text{Ainsi il existe } N_0 \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N_0,\ Q_n \geqslant \ell - \varepsilon = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$
   $$\implies |u_{n+1}| \geqslant \frac{3}{2}|u_n|$$

   (b) En déduire (à la mode géo) une minoration de u_n puis que la suite $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$.

   On poursuit "à la mode géo", Tant que c'est valide

   $$\begin{aligned}
   \textit{Pour tout } n \geqslant N_0,\quad |u_n| &\geqslant \frac{3}{2}|u_{n-1}| \\
   &\geqslant \frac{3}{2}\frac{3}{2}|u_{n-2}| \\
   &\geqslant \frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}|u_{n-3}| \\
   &\ \ \vdots \\
   &\geqslant \frac{3}{2}\cdots\frac{3}{2}|u_{N_0}| = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-N_0}|u_{N_0}| = \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \times Konstante
   \end{aligned}$$

   Ainsi la suite $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$ (Théorème de comparaison)

   Conclusion. C'est absurde car on a supposé que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc $|u_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |0| = 0$

   (c) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique.

   > On vient de montrer par un RA que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$
   > Comme $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\sin(2u_n)$, on a que $\forall\, n \geqslant 1, -1 \leqslant u_n \leqslant 1$
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas diverger vers $+\infty$ ou ∞

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   On fait "facilement" par récurrence (double) $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule et $u_n \geqslant 0$

   Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   Pour tout $n \geqslant 2$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n-1}}{n-1} \geqslant 0$ car $\forall\, n, u_n \geqslant 0$

2. On suppose que la suite (u_n) converge vers ℓ.

   Comme la suite (u_n) est croissante, on a forcément $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant ... \leqslant u_n \leqslant .... \leqslant \ell$

   (a) Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,$ alors $u_n - u_{n-1} \geqslant \dfrac{\ell}{2n}$

   On a

$$Q_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\frac{\ell}{2n}} = \frac{\frac{u_{n-2}}{n-2}}{\frac{\ell}{2n}} = \frac{2n\, u_{n-2}}{\ell(n-2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\ell}{\ell \neq 0} = 2$$

   $>$ J'applique la def de $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ avec $\varepsilon = 1 > 0$

   Ainsi il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ Q_n \ \geqslant \ell - \varepsilon = 2 - 1 = 1$

$$\Longrightarrow u_n - u_{n-1} \geqslant \frac{\ell}{2n}$$

   (b) En déduire une minoration de u_n.

   On somme l'inégalité précédente de $k = N_0$ à $k = n$

$$\textit{Ainsi on a } \underbrace{\sum_{k=N_0}^{n} [u_k - u_{k-1}]}_{\text{Télescopage}} \geqslant \sum_{k=N_0}^{n} \frac{\ell}{2k}$$

   Ainsi $u_n - u_{N_0-1} \geqslant \dfrac{\ell}{2} \displaystyle\sum_{k=N_0}^{n} \frac{}{k} = \dfrac{\ell}{2}\,(H_n - H_{N_0-1})$

   (c) En déduire une contradiction. Rappel : La suite harmonique (H_n) diverge vers $+\infty$

   Pour tout $n \geqslant N_0$, on a : $u_n \geqslant u_{N_0-1} + \dfrac{\ell}{2}\,(H_n - H_{N_0-1})$

   ET on sait $u_{N_0-1} + \dfrac{\ell}{2}\,(H_n - H_{N_0-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Oups car on a supposé que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$

   l'hyp "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est fausse"

   Conclusion.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) Correction non-détaillée

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}} \qquad \text{Il y a } n \text{ symboles } \sqrt{\ldots}$$

1. On a $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2+x}$.
2. Bien définie ?

   Comme $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{.....+\sqrt{2}}}}}$ le nombre u_n est bien définie **et est positif.**
3. Les limites possibles

   Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue,

   on sait que les limites possibles de la suite vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$

   On résout l'équation et on trouve que l'unique limite qui convient c'est $\ell = 2$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2

   On fait facilement par récurrence $H_{<n>}$: $u_{n+1} \geqslant u_n$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

   On démontre facilement par récurrence : $H_{<n>}\ :\ u_n \leqslant 2$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 2

   donc elle converge $\ell = 2$ qui est la seule limite possible.
5. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$

   Avec le TAF, on démontre que $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|$

   Puis on finit à la mode géo.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé) On considère la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}.$$

1. Étude de (S_n)
   (a) Convergence de la suite (S_n).
      i. Montrer que : $\forall\, k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{2k^2} - \dfrac{1}{2(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^3} \leqslant \dfrac{1}{2(k-1)^2} - \dfrac{1}{2k^2}$

      Facile Gros-petit

      ii. En déduire que la suite (S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

      On somme l'inégalité de $k = 2$ à $k = n$

$$\text{ainsi, } \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}\right]$$

Télescopage

$$\leqslant \frac{1}{2(1)^2} - \frac{1}{2(n)^2} \leqslant \frac{1}{2} - \cancel{0}$$

      On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} \leqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

      Conclusion : la suite (S_n) est croissante (facile) et majorée par $\dfrac{3}{2}$

      Donc la suite (S_n) converge vers $\ell \leqslant \dfrac{3}{2}$

   (b) Encadrement de $\ell - S_n$
      i. En utilisant Q1., montrer que pour tout $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leqslant n \leqslant p$, $\dfrac{1}{2\,(n+1)^2} - \dfrac{1}{2\,(p+1)^2} \leqslant S_p - S_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{2p^2}$.

      On a

$$\begin{aligned}
S_p - S_n &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \\
&= \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^3} \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \left[\frac{1}{2(k-1)^2} - \frac{1}{2k^2}\right] \\
&\quad \textit{Télescopage} \\
&\leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2p^2}
\end{aligned}$$

      On fait de même pour la minoration

      ii. En déduire un encadrement que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \ell - S_n \leqslant \dfrac{1}{2\,n^2}$

      On OrdredeGrandeur quand $p \longrightarrow \infty$

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{1}{2\,(n+1)^2} - \dfrac{1}{2\,(p+1)^2} \leqslant S_p - S_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{2p^2} \\
S_p - S_n \xrightarrow{p\to\infty} \ell - S_n \\
\dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{2p^2} \xrightarrow{p\to\infty} \dfrac{1}{2n^2} - 0
\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{ À la limite quand } p \longrightarrow \infty, \text{ on a } \frac{1}{2\,(n+1)^2} \leqslant \ell - S_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

2. Étude de (A_n)
   (a) Montrer que (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes.

   Facile

(b) En déduire que (A_n) converge C'est du cours.

$$\left.\begin{array}{r}(A_{2n}) \text{ et } (A_{2n+1}) \text{ convergent vers la même limite notée } a \\ (A_{2n}) \text{ et } (A_{2n+1}) \text{ contiennent toutes les termes de la suite.}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ la suite } (A_n) \text{ converge vers } a.$$

On note a la limite de la suite (A_n)

3. Trouver Lien entre ℓ et a.

On remarque que $S_n = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{n} \ldots . + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{n} \ldots .$ et $A_n = -\sum\limits_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{n} \ldots . + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{n} \ldots .$

On a ainsi

$$\begin{aligned} S_n - A_n &= 2\sum_{\substack{k=1 \\ \text{pair}}}^{n} \frac{1}{k^3} \\ &\text{On ré-indexe avec } k = 2p \\ &= 2\sum_{p=1}^{n/2} \frac{1}{(2p)^3} \\ &= \frac{2}{8}\sum_{p=1}^{n/2} \frac{1}{p^3} = \frac{1}{4}S_{n/2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\left.\begin{array}{c} S_n - A_n = \frac{1}{4}S_{n/2} \\ S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{A la limite qd } n\to+\infty} \ell - a = \frac{1}{4}\ell$$

Conclusion : On a $a = \dfrac{3}{4}\ell$