TD 11-Bonus Suite . Mercredi 03 Décembre 2025.

Exercice 1. [Correction] Dans tout le problème, on considère la fonction numérique f de variable réelle définie par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie λ,
   alors λ ne peut prendre que l'une des deux valeurs $\ell_1 < 0$ ou $1 < \ell_2 < 2$.

$$\boxed{\text{On suppose que : } u_0 \in]1, \ell_2[.}$$

2. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ , 1 < u_n < 2$.
3. On considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$.
   (a) Prouver que, pour tout entier naturel, $v_{n+1} = [f \circ f](v_n)$.
   (b) Pour tout réel x, calculer $[f \circ f](x)$ puis déterminer a et b réels tels que, pour tout réel x,
   $$[f \circ f](x) - x = \left(-x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + ax + b\right).$$
   (c) Déterminer les valeurs du réel x telles que $[f \circ f](x) - x = 0$ et le signe de $[f \circ f](x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]1, 2[$.
   (d) Nature de la suite (v_n)
   Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n \in]1, \ell_2[$
   Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
4. On considère $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{2n+1}$.
   Déterminer le lien entre v_n et w_n.
   En déduire que la suite (w_n) converge et déterminer sa limite.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 2. [Correction] Le nombre de Liouville

Notation : On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

Un nombre complexe r est dit algébrique

Ssi il existe un polynôme P *non nul à coefficients entiers* tel que $P(r) = 0$.

Ssi r est une racine d'un polynôme non-nul $P \in \mathbb{Z}[X]$

Par exemple : $r = {}^{a}/_{b} \in \mathbb{Q}$ est algébrique car r est une racine de $P(X) = bX - a \in \mathbb{Z}[X]$

$r = \sqrt{2}$ est algébrique car r est une racine de $P(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$

Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant.

Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe des nombres transcendants.

1. Exemples
   (a) Montrer que le célèbre complexe j est algébrique.
   (b) Montrer que le réel $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique (plus délicat).

2. Une minoration utile.
   Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré d.
   On suppose que $r = {}^{a}/_{b} \in \mathbb{Q}$ **N**'est **PAS** une racine de P.
   Montrer que : $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right| \geqslant \dfrac{1}{b^d}$

3. Le nombre de Liouville
   On considère la suite (S_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{k!}}$
   (a) Démontrer que la suite (S_n) converge vers une limite noté ℓ comme Liouville
   indication : On pourra majorer S_n à l'aide d'une suite Géo
   (b) Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant n \leqslant p$. Montrer que : $|S_p - S_n| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{10^{k!}} \leqslant \frac{10^{-(n+1).n!} - 10^{-(p+1).n!}}{1 - 10^{-n!}}$
   indication : on re-lira l'indication précédente
   (c) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |\ell - S_n| \leqslant \dfrac{1}{10^{n.n!}}$

4. On va démontrer (avec un RA) que le nombre ℓ est transcendant (Liouville en 1874).
   On suppose que ℓ est algébrique, ainsi il existe un polynôme P *non nul à coefficients entiers* tel que $P(\ell) = 0$.
   On note d le degré de P.
   (a) *On admet qu'il existe une constante K tel que* $\forall\, t \in \left[\ell - 1, \ell + 1\right],\ |P'(t)| \leqslant K$
   Montrer que : Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \leqslant 1$, alors on a $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \geqslant \dfrac{K}{b^d}$
   Remarque : Le résultat admis incite à utilise le TAF.
   (b) En utilisant Q3c., trouver déduire une absurdité.

Ainsi l'hypothèse "le nombre ℓ est algébrique" est absurde

Conclusion le nombre ℓ est transcendant.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

1. On a

$$\left.\begin{array}{c} u_{n+1} = f(u_n) \\ \textit{la fonction f est continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \textit{Si la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge vers } \ell \\ \textit{Alors on a } \ell = f(\ell) \end{array}$$

   On résout l'équation

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = -\ell^2 + 2\ell + 1 \iff \ell^2 - \ell - 1 = 0 \iff \ell_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \textit{ ou } \ell_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. On démontre par récurrence $H_{<n>}$: $1 < u_n < 2$

   Initialisation : Comme $\ell_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$, on a bien $1 < u_0 < 2$.
   Hérédité : On suppose $H_{<n>}$ est vraie.

   Comme $f'(x) = -2x + 2 = 2(-x+1)$, la fonction f est décroissante sur $[1,2]$, ainsi on a

$$\left.\begin{array}{c} 1 < u_n < 2 \\ \textit{la fonction f est décroissante sur } [1,2] \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(2)}_{=1} < \underbrace{f(u_u)}_{=u_{n+1}} < \underbrace{f(1)}_{=2}$$

   Donc $H_{<n+1}$ est vraie

3. Comme f est décroissante sur $[1,2]$ et $\forall\, n,\ u_n \in [1,2]$, on a

$$u_n < u_{n+1} \Longrightarrow u_{n+1} > u_{n+2} \quad et \quad u_n > u_{n+1} \Longrightarrow u_{n+1} < u_{n+2}$$

   La suite n'est donc pas monotone ! ! ! !

4. On considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$.

   (a) pour tout n, on a

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = [f\circ f](u_{2n}) = [f\circ f](v_n)$$

   Conclusion : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $v_{n+1} = h(v_n)$ avec $h = f\circ f$

   (b) On a $[f\circ f](x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$ et

$$[f\circ f](x) - x = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 - x + 2 = (-x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 2)$$

   (c) On a

$$\begin{aligned} [f\circ f](x) - x = 0 &\iff (-x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0 \\ &\iff -(x-\ell_1)(x-\ell_2)(x-1)(x-2) = 0 \\ &\iff x = \ell_1, \ell_2, 1 \textit{ ou } 2. \end{aligned}$$

   Comme $[f\circ f](x) - x = -(x-\ell_1)(x-\ell_2)(x-1)(x-2)$, on a le tableau de signe

x	$-\infty$		ℓ_1		1		ℓ_2		2		$+\infty$
$[f\circ f](x) - x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi on a : Sur $[1,\ell_2]$, $[f\circ f](x) - x \geqslant 0$ et Sur $[\ell_2, 2]$, $[f\circ f](x) - x \leqslant 0$.

(d)

Décroissante ? On suit la démarche classique pour les suites récurrentes

$>$ On commence par démontrer par récurrence $H_{<n>} : v_n \in [1, \ell_2]$

C'est facile car comme f est décroissante $[1, \ell_2]$ on sait que $h = f \circ f$ est croissante.

$>$ On ensuite que $u_1 - u_0 = [f \circ f](u_0) - u_0 \leqslant 0$ car $u_0 \in [1, \ell_2]$

$>$ On a $v_{n+1} = h(v_n)$ avec $h = f \circ f$ est croissante sur $[1, \ell_2]$ et pour tout $\forall n,\ v_n \in [1, \ell_2]$ et que $u_1 - u_0 \leqslant 0$,

On démontre facilement par récurrence $H_{<n>} : v_{n+1} \leqslant v_n$,

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissant.

Converge ?

La suite est donc décroissante et minorée par 1

donc elle converge vers $1 \leqslant \ell \leqslant v_0 \leqslant \ell_2$.

Enfin Comme f est continue les limites de la suites (v_n) vérifient l'équation $[f \circ f](\ell) = \ell$ et on a vue que

$[f \circ f](x) = x \iff [f \circ f](x) - x = 0 \iff x = \ell_1, \ell_2, 1\ ou\ 2$

donc la suite (v_n) converge vers 1.

5. On a

$$\left.\begin{array}{c} w_{n+1} = f(v_n) \\ v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ \text{la fonction } f \text{ est continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow w_{n+1} = f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(1) = 2$$

donc la suite (w_n) converge vers 2.

6. On a trouvé deux suites extraites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ qui convergent vers 2 limites différentes

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge strictement.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Exemples

(a) Montrer que le célèbre complexe j est algébrique.

Comme $1+j+j^2=0$, le complexe j est une racine du polynôme $P=X^2+X+1\in\mathbb{Z}[X]$. Donc le complexe j est algébrique.

(b) Montrer que le réel $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est algébrique (plus délicat).

On note $r=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Ainsi $\sqrt{2}=r-\sqrt{3}$ donc $2=\left(r-\sqrt{3}\right)^2=r^2-2\sqrt{3}r+3$

Ainsi $\sqrt{3}=\dfrac{r^2+1}{2r}$ donc $3=\left(\dfrac{r^2+1}{2r}\right)^2=\dfrac{r^4+2r^2+1}{4r^2}\implies 3.4r^2=r^4+2r^2+1\implies r^4-10r^2+1=0$

Conclusion : le nombre r est une racine du polynôme $P=X^4-10X^2+1\in\mathbb{Z}[X]$.

Donc le nombre r est algébrique.

2. Une minoration utile.

Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré d. On suppose que $r={}^a/_b\in\mathbb{Q}$ **N'est PAS** une racine de P.

Montrer que : $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right|\geqslant\dfrac{1}{b^d}$

Comme $P\in\mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul de degré d, on a $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ avec $a_k\in,\mathbb{Z}$ et $a_d\neq 0$.

On a

$$\begin{aligned}\left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| &= \left|\,|\sum_{k=0}^{d}a_k\left(\frac{a}{b}\right)^k\right|\\ &= \left|a_0+a_1\left(\frac{a}{b}\right)+a_2\left(\frac{a}{b}\right)^2+\cdots+a_d\left(\frac{a}{b}\right)^d\right|\\ &= \left|\frac{a_0b^d+a_1ab^{d-1}+\cdots+a_da^d}{b^d}\right|\\ &= \left|\frac{\sum_{k=0}^{d}a_ka^kb^{d-k}}{b^d}\right| = \left|\frac{Entier}{b^d}\right| = \frac{|Entier|}{b^d}\end{aligned}$$

De plus $r={}^a/_b\in\mathbb{Q}$ **N'est PAS** une racine de P

donc $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right|\neq 0$ donc $|Entier|\neq 0$

Conclusion $|Entier|$ est un entier strictement positif

donc $|Entier|\geqslant 1$ et $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right|\geqslant\dfrac{1}{b^d}$

3. Le nombre de Liouville. On considère la suite (S_n) définie par $\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{10^{k!}}$

(a) Démontrer que la suite (S_n) converge vers une limite noté ℓ comme Liouville

Comme $\forall\, n\in\mathbb{N},\ S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{10^{(n+1)!}}>0$, la suite (S_n) est croissante

On a facilement $k!=1.2....k\geqslant 1.1...1.k=k$, ainsi

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{10^{k!}}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{1}{10^k}}_{=\square^k}$$

$$\leqslant\frac{1-\dfrac{1}{10^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{10^1}}\leqslant\frac{1-0}{1-\dfrac{1}{10^1}}=\frac{10}{9}$$

Conclusion : la suite (S_n) est croissante et majorée par ${}^{10}/_9$ donc elle converge

(b) Soit $n,p\in\mathbb{N}$ avec $0\leqslant n\leqslant p$. Montrer que : $|S_p-S_n|=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{10^{k!}}\leqslant\frac{10^{-(n+1).n!}-10^{-(p+1).n!}}{1-10^{-n!}}$

Pour tout $k \geqslant (n+1)$, on a $k! = 1.2...n(n+1)(n+2)...k \leqslant 1.2...n(n+1)1...1.k = (n+1)!.k$, ainsi

$$|S_p - S_n| = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{10^{k!}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \underbrace{\frac{1}{10^{(n+1)!.k}}}_{\square^k}$$

$$\leqslant \frac{1-\square^{p+1}}{1-\square} - \frac{1-\square^{n+1}}{1-\square}$$

$$\leqslant \frac{\square^{n+1}-\square^{p+1}}{1-\square} = \frac{10^{-(n+1).n!} - 10^{-(p+1).n!}}{1-10^{-n!}}$$

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\ell - S_n| \leqslant \dfrac{1}{10^{n.n!}}$

À la limite quand $p \to \infty$, on obtient

$$|\ell - S_n| \leqslant \frac{10^{-(n+1).n!} - O}{1-10^{-n!}}$$

De plus $\dfrac{1}{10^{n.n!}} - \dfrac{10^{-(n+1).n!} - O}{1-10^{-n!}} = ... \geqslant 0$

4. On va démontrer (avec un RA) que le nombre ℓ est transcendant (Liouville en 1874).
   On suppose que ℓ est algébrique, ainsi il existe un polynôme P *non nul à coefficients entiers* tel que $P(\ell) = 0$.
   On note d le degré de P.

   (a) *On admet qu'il existe une constante K tel que $\forall t \in [\ell-1, \ell+1]$, $|P'(t)| \leqslant K$*

   Montrer que : Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \leqslant 1$, alors on a $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \geqslant \dfrac{K}{b^d}$

   On suppose que : $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ avec $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \leqslant 1$.

   Comme P est dérivable et $\forall t \in [\ell-1, \ell+1]$, $|P'(t)| \leqslant K$,
   on sait d'après le TAF que $\forall x, x' \in [\ell-1, \ell+1]$, $|P(x) - P(x')| \leqslant K\,|x - x'|$

   On applique avec $x = \ell$ et $x' = {}^a/_b$,

   ainsi $\left|P(\ell) - P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right| \leqslant K\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right|$

   Or on sait que $P(\ell) = 0$ (car ℓ est racine) et $\left|P\left(\dfrac{a}{b}\right)\right| \geqslant \dfrac{1}{b^d}$ (voir question Q2.)

   Conclusion : $\left|\ell - \dfrac{a}{b}\right| \geqslant \dfrac{K}{b^d}$

   (b) En utilisant Q3c., trouver déduire une absurdité.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{0!}} + \frac{1}{10^{1!}} + \cdots + \frac{1}{10^{n!}} = \frac{Entier}{10^{n!}} \in \mathbb{Q}$$

   Comme $|\ell - S_n| \leqslant \dfrac{1}{10^{n.n!}} \leqslant \dfrac{1}{10^0} = 1$

   Donc la minoration précédent est valide, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{K}{(10^{n!})^d} \leqslant |\ell - S_n| \leqslant \dfrac{1}{10^{n.n!}} = \dfrac{1}{(10^{n!})^n}$

   Ceci est absurde car $\dfrac{(10^{n!})^d}{(10^{n!})^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\dfrac{(10^{n!})^d}{(10^{n!})^n} \geqslant K > 0$

   Ainsi l'hypothèse "le nombre ℓ est algébrique" est absurde
   Conclusion le nombre ℓ est transcendant.