Les suites.

1 À partir d'un certain rang

Définition 1. À partir d'un certain rang

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ ,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang

Ssi il existe N_0 tel que :
$\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

De même, on peut fabriquer : positive, majorée, bornée à partir d'un certain rang,........

Un exemple très important.

On sait que le nombre 2^n devient infiniment plus petit que le nombre $n!$ $_{\text{quand } n\to\infty}$

Ainsi on peut anticiper que

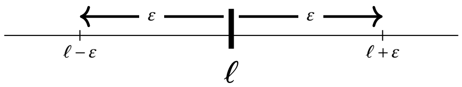
le nombre 2^n devient *effectivement* plus petit que le nombre $n!$

CàD il existe N_1 tel que : $\forall\, n \geqslant N_1,\ 2^n \leqslant n!$

2 Définition de la convergence d'une suite.

2.1 Converge dans $\mathbb{R}$.

Ici il faut rappeler que



$$|x-\ell| \leqslant \varepsilon \iff x \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$$
$$\iff \ell-\varepsilon \leqslant x \leqslant \ell+\varepsilon$$

Définition 2. Définition de converge vers ℓ

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ Ssi on a

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \textit{il existe un rang } N_0 \textit{ tel que}$$
$$\textit{Si } n \geqslant N_0 \textit{ alors } \ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell+\varepsilon \quad \textit{ou}\, |u_n-\ell| \leqslant \varepsilon$$

On écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Attention : Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ Alors la limite ℓ ne dépend pas de n.

Pour comprendre la définition, on va l'appliquer

> J'applique la définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = 1 > 0$.

Ainsi on a

> J'applique la définition de $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = {}^1/_{10} > 0$.

Ainsi on a

À retenir : Quand on applique la définition $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = \square > 0$,

Alors on obtient une inégalité $u_n \leqslant \ell + \square$,

valide à partir d'un certain rang

2.2 Diverge.

Définition 3. Divergence vers $\pm\infty$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Vers $+\infty$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ Ssi on a

$$\forall\, M > 0, \quad \textit{il existe un rang } N_0 \textit{ tel que} \\ \textit{Si } n \geqslant N_0 \textit{ alors } M \leqslant u_n$$

On écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Vers $-\infty$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ Ssi on a

$$\forall\, m < 0, \quad \textit{il existe un rang } N_0 \textit{ tel que} \\ \textit{Si } n \geqslant N_0 \textit{ alors } u_n \leqslant m$$

On écrit alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Divergence stricte, CàD le chaos.

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ et ne diverge pas vers $\pm\infty$,

on dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge strictement

Par exemple, les suites $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent strictement.*

À retenir : Quand on applique la définition $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ avec $M = \square$,

Alors on obtient une inégalité $\square \leqslant u_n$,

valide à partir d'un certain rang

3 Applications

3.1 Cv $\Longrightarrow$ majorée-minorée-Bornée

Théorème 4. Le nombre u_n se rapproche de ℓ.

Lorsque la suite (u_n) converge vers ℓ,
alors le nombre u_n se rapproche ℓ

Converge $\Longrightarrow$ Majorée/minoré.

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Alors le nombre u_n devient $\leqslant \ell+1$ à partir d'un certain rang.

Converge $\Longrightarrow$ bornée.

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Alors le nombre $|u_n|$ devient $\leqslant |\ell|+1$ à partir d'un certain rang.

3.2 Unité de la limite.

Théorème 5. unicité de la limite

On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'une part vers ℓ et d'autre part vers ℓ',
alors $\ell = \ell'$

4 Cv $\Longrightarrow$ à partir d'un certain rang ....

Théorème 6. Cv $\Longrightarrow$ à partir d'un certain rang ....

Lorsque la suite (u_n) converge vers ℓ,
alors le nombre u_n se rapproche ℓ

> On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\ell > 0$

Alors à partir d'un certain rang, le nombre u_n est > 0, CàD positif

> On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\ell < 1$

Alors à partir d'un certain rang, le nombre u_n est < 1

`Généralisation Indispensable`

> On suppose que $\dfrac{u_n}{\square_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\ell < 1$

Alors il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_n \leqslant \square_n$

> On suppose que $\dfrac{u_n}{\square_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et et $\ell > 1$

....

5 À la limite quand $n \to \infty$.

Théorème 7. À la limite quand $n\to\infty$

Soit (G_n) et (D_n) deux suites.

On a

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, n,\quad G_n \leqslant D_n\\ G_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\\ D_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{À la limite quand } n\to\infty,\\ \quad\text{l'inégalité devient}\quad \ell \underset{Large}{\leqslant} \ell'\end{array}$$

Avec $G_n = D_n$ et on conclut $\ell = \ell'$

6 Théorèmes de convergence

6.1 Opérations sur les limites.

Théorème 8. Formulaire classique.
On suppose que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'$.

On a alors

$$|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |\ell|$$

$$\lambda a_n + \mu b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda\ell + \mu\ell' \quad \textit{ici } \lambda \textit{ et } \mu \textit{ deux scalaires (réels ou complexes).}$$

$$a_n.b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.\ell'$$

$$a_n / b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell / \ell' \quad \textit{ici } \forall\, n,\ b_n \neq 0 \textit{ et } \ell' \neq 0$$

$$f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell) \quad \textit{ici La fonction } f \textit{ est continue en } \ell, \textit{ CàD } f(x) \xrightarrow[x\to\ell]{} f(\ell)$$

$$(a_n)^{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell^{\ell'}$$

Avec les équivalents.

$$\left.\begin{array}{r} u_n \underset{n\to\infty}{\sim} A_n \\ \\ A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{La suite } (u_n) \textit{ converge vers } \ell$$

Démonstration : On fera les démonstrations en classe, cependant

$$u_n^{v_n} = a^{bouge} = e^{b\ln(a)} = \exp(v_n \ln u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\big(\ell'.\ln(\ell)\big) = \ell^{\ell'}$$

6.2 Gendarmes et copains.

Théorème 9. Gendarmes et copains.

Le théorème des 2 gendarmes.

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n,\ m_n \leqslant u_n \leqslant M_n \\ \\ m_n, M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

Le théorème de comparaison.

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n, \quad m_n \leqslant u_n \\ \\ m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge } +\infty$$

Le théorème du module/de la distance.

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n, \quad |u_n - \ell| \leqslant M_n \\ \\ M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

6.3 Suite monotone.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite alors il y a 3 situations envisageables

Soit la suite converge dans $\mathbb{R}$ Soit la suite diverge vers $\pm\infty$ Soit la suite est chaotique

On suppose que la suites est croissante alors il y a 2 possibilités

$\boxed{\text{Soit la suite converge dans } \mathbb{R}}$ $\boxed{\text{Soit la suite diverge vers } \pm\infty}$

Théorème 10. Théorème de la limite monotone.

Théorème de la limite monotone.

$$\left.\begin{array}{c}\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ \\ \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée par } M\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\ \text{vers } \ell \leqslant M\end{array}$$

De plus, on a : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant .. \leqslant \ell \leqslant M$

Suite croissante et ne converge pas.

$$\left.\begin{array}{c}\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ \\ \text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas dans } \mathbb{R}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge} \\ \text{vers } +\infty\end{array}$$

De plus pour montrer la suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$, on fait un R.A.

7 Exercices

Exercice 1. [Correction] Étudier la monotonie, ou la monotonie à partir d'un certain rang, des suites suivantes

$$\frac{n^3}{2^n} \qquad \frac{11^n}{n!} \qquad \binom{2n}{n} \qquad \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$$

Exercice 2. [Correction] Soit $\alpha > 0$. On considère la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^\alpha}{2^n}$

L'objectif est de montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1. Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}u_n$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_0
   En déduire qu'elle converge vers $\ell \geqslant 0$
3. Démontrer que $\ell = 0$

Exercice 3. [Correction] Soit $\alpha > 0$. On considère la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^\alpha}{2^n}$

L'objectif est de montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

1. Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}u_n$
2. Fabriquer, à l'aide de la question Q1, une majoration du nombre u_n
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Exercice 4. [Correction] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right)$.

1. *On admet que* $\dfrac{\ln(1+\square)}{\square} \xrightarrow[\square\to 0]{} 1$.
   Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que : $\forall\, k \geqslant N_0,\ \ln\left(\dfrac{3^k+1}{3^k}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{3^k}\right) \leqslant \dfrac{2}{3^k}$
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5. [Correction] On va étudier la suite (U_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$

1. *On admet que* $\dfrac{\sin(\square)}{\square} \xrightarrow[\square\to 0]{} 1$.
   Montrer qu'il existe un entier N_0 tel : $\forall\, k \geqslant N_0,\ \sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
2. En déduire une majoration de U_n.
3. La suite (U_n) converge-t-elle ?

Exercice 6. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty}$$

1. *On admet que* $\frac{\ln(1+\square)}{\square} \xrightarrow[\square\to 0]{} 1$.

   Montrer que : Il existe un rang N_0 tel que $\forall\, k \geqslant N_0,\ \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2}(\ln(k+1) - \ln(k))$
2. En déduire que : $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Exercice 7. [Correction] Soit (u_n) la suite définie par

$$0 < u_1 \leqslant u_2 \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{n} u_n.$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. On suppose que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   Comme la suite (u_n) *est croissante, on a forcément* $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots \leqslant \ell$
   (a) Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0$, alors $u_n - u_{n-1} \geqslant \frac{\ell}{2n}$
   (b) En déduire une minoration de u_n.
   (c) En déduire une contradiction. Rappel : La suite harmonique (H_n) diverge vers $+\infty$
   Conclusion.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé)

> Monotonie de $u_n = \dfrac{n^3}{2^n}$ On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = dfrac(n+1)^3 2^{n+1} - \frac{n^3}{2^n} = \frac{1}{2^n}[\cdots]$$

Conclusion : $u_{n+1} - u_n < 0$ à partir du rang $N_0 = 1492$, la suite est croissante à partir du rang 14921

> Monotonie de $u_n = \dfrac{11^n}{n!}$ On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{11^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{11^n}{n!} = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11}{n+1} - 1\right] = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11-n}{n+1}\right]$$

Conclusion : $u_{n+1} - u_n < 0$ à partir du rang $N_0 = 11$, la suite est croissante à partir du rang 11

> Monotonie de $u_n = \dfrac{11^n}{n!}$ On a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{11^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{11^n}{n!} = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11}{n+1} - 1\right] = \frac{11^n}{n!}\left[\frac{11-n}{n+1}\right]$$

Conclusion : $u_{n+1} - u_n < 0$ à partir du rang $N_0 = 11$, la suite est croissante à partir du rang 11

> Monotonie $u_n = \dbinom{2n}{n}$ On a

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \binom{2n+2}{n+1} - \binom{2n}{n} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} - \frac{(2n)!}{n!\,n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} - 1\right] \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{2(2n+1)}{(n+1)} - 1\right] \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\left[\frac{4n+2-(n+1)}{(n+1)}\right] \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\frac{3n+1}{(n+1)} \geqslant 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. la suite est croissante

> Monotonie $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$On a

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+2}^{2n+2} - \sum_{k=n+1}^{2n} &= \underbrace{\frac{-1}{n+1}}_{k=n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} + \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+2} \\ &= \frac{Haut}{2(n+1)(2n+1)}\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. la suite est croissante

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n$

$$\text{On considère } Q_n = \frac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n}. \text{ On a } Q_n = \frac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{2^{n+1}}}{\frac{3}{4}\frac{n^\alpha}{2^n}} = \frac{4}{3}\frac{(n+1)^\alpha 2^n}{n^\alpha 2^{n+1}}$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$$
$$= \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}(1+\mathcal{O})^\alpha = \frac{2}{3}$$

J'applique la def de $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2/3$ avec $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$

Ainsi $\exists N_0$ tq $\forall n \geqslant N_0,\ Q_n \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

Conclusion : il existe un rang N_0 tel que $Q_n \leqslant 1 \implies u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_0

Pour $n \geqslant N_0$,

on a $u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{3}{4}u_n - u_n = \frac{-1}{4}u_n \leqslant 0$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_0

En déduire qu'elle converge vers $\ell \geqslant 0$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_0 et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive

Conclusion : LA suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$

3. Démontrer que $\ell = 0$

On va OrdreGrandérer

$$\left.\begin{array}{c} \forall n \geqslant N_0,\ u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}u_n \\ u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \frac{3}{4}u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{4}\ell \end{array}\right\} \implies \text{À la limite } \ell \leqslant \frac{3}{4}\ell$$

On ré-organise : $\ell \leqslant \frac{3}{4}\ell \iff \ell \leqslant 0$

Conclusion : On a $\ell \leqslant 0$ et $\ell \geqslant 0$ donc $\ell = 0$

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n$

$$\text{On considère } Q_n = \frac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n}. \text{ On a } Q_n = \frac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{2^{n+1}}}{\frac{3}{4}\frac{n^\alpha}{2^n}} = \frac{4}{3}\frac{(n+1)^\alpha 2^n}{n^\alpha 2^{n+1}}$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha$$
$$= \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}(1+\mathcal{O})^\alpha = \frac{2}{3}$$

J'applique la def de $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2/3$ avec $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$

Ainsi $\exists N_0$ tq $\forall n \geqslant N_0,\ Q_n \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

Conclusion : il existe un rang N_0 tel que $Q_n \leqslant 1 \implies u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n$

2. Fabriquer, à l'aide de la question Q1, une majoration du nombre u_n

On a "à la mode géo" :
$$u_n \leqslant \frac{3}{4}u_{n-1}$$
$$\leqslant \frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}u_{n-2}\right]$$
$$\vdots$$
$$\leqslant \frac{3}{4}\cdots\frac{3}{4}\left[\frac{3}{4}u_{N_0}\right] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N_0} u_{N_0}$$

3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Conclusion : on a $\forall\, n \geqslant N_0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^{-N_0} u_{N_0}}_{=Konstante}$

Le théorème des 2 gendarmes assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0$

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Montrer qu'il existe un entier N_0 tel que : $\forall k \geqslant N_0,\ \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{3^k}\right) \leqslant \frac{2}{3^k}$

   On considère
   $$Q_k = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{3^k}\right)}{2/3^k} = 3^k \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right) = \frac{1}{2}3^k \ln\left(1+\frac{1}{3^k}\right) = \frac{1}{2}\frac{\ln(1+\square)}{\square} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$
   J'applique la définition de $Q_k \to \frac{1}{2}$ avec $\varepsilon = 1/2 > 0$

   Ainsi il existe un rang N_0 tel que $\forall k \geqslant N_0,\ Q_k \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
   $$\implies \ln\left(\tfrac{3^k+1}{3^k}\right) \leqslant \frac{2}{3^k}$$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

   On somme l'inégalité précédent de $k = N_0$ à $k = n$, CàD **là où elle est valide**

   ainsi $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N_0-1} \cdots}_{Konstante} + \sum_{k=N_0}^{n} \ln\left(\frac{3^k+1}{3^k}\right) \leqslant K + \sum_{k=N_0}^{n}\left[\frac{2}{3^k}\right]$

   C'est une Somme Géo

   Et on a $\square^{N_0} + \cdots + \square^n = 1 + \square + \cdots + \square^n - \left(1 + \cdots + \square^{N_0-1}\right)$
   $$= \frac{1-\square^{n+1}}{1+\square} - K'onstante$$
   $$\leqslant K + 2\left(\underbrace{\frac{1-\square^{n+1}}{1+\square}}_{\text{Attention ça dépend de } n} - K'\right) \quad \text{avec } \square = 1/3$$
   $$\leqslant K + 2\left(\frac{1-0}{1+\square} - K'\right)$$

   la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}}\right) \geqslant \ln(1) = \mathcal{O}$

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $K + 2\left(\frac{1-0}{1+\square} - K'\right)$ donc elle converge.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Montrer qu'il existe un entier N_0 tel : $\forall\, k \geqslant N_0,\ \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

   On a $Q_k = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} = \dfrac{k(k+1)}{k^2}\,\dfrac{\sin(\square)}{\square} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

   OUPS j'ai oublié un facteur 2 ! ! ! ! en fait c'est $\forall\, k \geqslant N_0,\ \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 2\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$.

   J'applique la définition de "$Q_k \to {}^1/_2$ " avec $\varepsilon = {}^1/_2 > 0$

   Ainsi il existe un rang N_0 tel que $\forall\, k \geqslant N_0,\ Q_k \leqslant \ell + \varepsilon = {}^1/_2 + {}^1/_2 = 1$
   $\implies \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 2\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$

2. En déduire une majoration de U_n.

   On somme l'inégalité précédent de $k = N_0$ à $k = n$, CàD **là où elle est valide**

   $$\text{ainsi} \sum_{k=N_0}^{n} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=N_0}^{n} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 2\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$$

   On télescope

   $$\leqslant 2\left[\frac{1}{N_0} - \frac{1}{n+1}\right] \leqslant \frac{2}{N_0}$$

   On ajoute les terme qui manquent, ainsi : $U_n \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{N_0-1} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{Konstante} + \frac{2}{N_0} = K + \frac{2}{N_0}$

3. La suite (U_n) converge-t-elle ?

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (facile), majorée par $K + \frac{2}{N_0}$ donc elle converge.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   On fait "facilement" par récurrence (double) $H_{<n>}$: le nombre u_n se calcule et $u_n \geqslant 0$

   Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   Pour tout $n \geqslant 2$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_{n-1}}{n-1} \geqslant 0$ car $\forall\, n, u_n \geqslant 0$

2. On suppose que la suite (u_n) converge vers ℓ.

   Comme la suite (u_n) est croissante, on a forcément $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots . \leqslant \ell$

   (a) Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0$, alors $u_n - u_{n-1} \geqslant \dfrac{\ell}{2n}$

   On a

   $$Q_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\frac{\ell}{2n}} = \frac{\frac{u_{n-2}}{n-2}}{\frac{\ell}{2n}} = \frac{2n\, u_{n-2}}{\ell(n-2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\ell}{\ell \neq 0} = 2$$

   $>$ J'applique la def de $Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$ avec $\varepsilon = 1 > 0$

   $$\text{Ainsi il existe } N_0 \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N_0,\ Q_n \geqslant \ell - \varepsilon = 2 - 1 = 1$$
   $$\Longrightarrow u_n - u_{n-1} \geqslant \frac{\ell}{2n}$$

   (b) En déduire une minoration de u_n.

   On somme l'inégalité précédente de $k = N_0$ à $k = n$

   $$\textit{Ainsi on a } \underbrace{\sum_{k=N_0}^{n} \left[u_k - u_{k-1}\right]}_{\text{Télescopage}} \geqslant \sum_{k=N_0}^{n} \frac{\ell}{2k}$$

   Ainsi $u_n - u_{N_0-1} \geqslant \dfrac{\ell}{2} \displaystyle\sum_{k=N_0}^{n} \frac{}{k} = \frac{\ell}{2}\left(H_n - H_{N_0-1}\right)$

   (c) En déduire une contradiction. Rappel : La suite harmonique (H_n) diverge vers $+\infty$

   Pour tout $n \geqslant N_0$, on a : $u_n \geqslant u_{N_0-1} + \dfrac{\ell}{2}\left(H_n - H_{N_0-1}\right)$

   ET on sait $u_{N_0-1} + \dfrac{\ell}{2}\left(H_n - H_{N_0-1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Oups car on a supposé que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$

   l'hyp "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est fausse"

   Conclusion.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$