Suites Extraites.

1 Définition et exemples.

Définition 1. Suite extraite.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la liste des nombres

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, ..., u_{1492}, ..., u_{10^{24}}, ...)$$

Un suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite obtenue :

> On prend une partie seulement des termes de la suite.

> On respecte l'ordre d'apparition.

Conclusion : une suite extraite est constituée de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont on garde l'ordre d'apparition, et sans répétition d'indice.

Théorème 2. Présenter une suite extraire

> visualiser les indices.

Une suite extraite est constitué de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dans l'ordre, et sans répétition d'indice,

Càd c'est une liste de la forme $(u_{n_0}, u_{n_1}, u_{n_2}, ..., u_{n_k}, ...)$ *avec* $n_0 < n_1 < ... < n_k < n_{k+1}$

Conclusion : une suite extraite, c'est $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *avec* $\forall\, k\in\mathbb{N},\ n_k < n_{k+1}$

> Via une fonction extractrice

La présentation ci dessus est un peu lourde car u_{n_k} c'est 3 lettres!!!!!
Pour alléger, on peut utiliser la fonction d'extraction ou extractrice définie par

$$\varphi : k \longmapsto \varphi(k) = n_k \text{ avec } \varphi \text{ strict croissante car } \varphi(k) = n_k < n_{k+1} = \varphi(k+1)$$

Conclusion : une suite extraite, c'est $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *avec* $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ *strict croissante*

Exemples

> La suite extraite des termes pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, CàD $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, ..., u_{2n}, ...)$
Ici les indices extraits sont $0, 2, 4, ..., 1492, ...$ et l'extractrice c'est $\varphi : n \longmapsto 2n$

> La suite extraite des termes impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, CàD *CàD* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_3, u_5, ..., u_{2n+1}, ...)$
Ici les indices extraits sont $1, 3, 5, ..., 41, ...$ et l'extractrice c'est $\varphi : n \longmapsto 2n+1$

> La suite extraite $\left(u_{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, CàD $\left(u_{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_0, u_1, u_4, u_9 ...., u_{n^2}, ...\right)$

> La suite extraite $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, CàD $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_4, u_8, u_{16} ...., u_{2^n}, ...)$

> La suite extraite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (\cancel{u_0}, u_1, u_2, u_3, u_4, ...)$ est aussi une suite extraite.

> Un dernier exemple : $(u_p)_{p \text{ est premier}} = (u_2, u_3, u_5, u_7, u_{11}, ..., u_{41}, ...)$
Ici les indices extraits sont les "indices premiers", CàD $2, 3, 5, 7, 11, 13, , ..., 41, ...$ mais il n'y a pas d'extractrice explicite.

2 Ce que l'on doit savoir

2.1 Convergence et suites extraites.

Théorème 3. Convergence et suites extraites.

Le sens naturel.

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$

Alors toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ, CàD

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \implies \begin{cases} u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \end{cases}$$

Plus généralement $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \implies u_\square \xrightarrow[\square\to\infty]{} \ell$

Le sens plus subtil.

$$\left.\begin{array}{c} \text{La suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \\ \text{La suite } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \\ \text{Les suites extraites contiennent } \textbf{l'intégralité} \text{ des termes de la suite} \end{array}\right\} \implies$$

$$\implies \text{Le suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

On peut généraliser avec les 3 suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$

Démonstration : On va faire une démonstration audacieuse du sens plus subtil.

> On sait que $\max(a,b)$ et $\min(a,b)$ s'exprime avec les fonctions usuelles.
En effet

$$\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}|a-b| \quad et \quad \min(a,b) = \frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}|a-b|$$

ainsi $M_n = \max(u_{2n}, u_{2n+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \max(\ell,\ell) = \ell$ et $m_n = \min(u_{2n}, u_{2n+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \min(\ell,\ell) = \ell$

> De plus on a

$$m_{\lfloor n/2 \rfloor} \leqslant u_n \leqslant M_{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Donc (théorème des gendarmes) on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

2.2 Suite chaotique.

Théorème 4. Suite chaotique
Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On suppose que l'on a trouvé 2 suites extraites qui convergent vers 2 limites $\ell \neq \ell'$
Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique.

Exemples. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$.

> D'une part. $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Donc la suite extraite des termes pairs converge vers 1.

> D'autre part. $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$. Donc la suite extraite des termes impairs converge vers -1.

Conclusion : la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique (mais très régulière).

Théorème 5. Complément sur les suites chaotiques
On suppose que : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique

alors la suite $(u_n + v_n)$ est chaotique.

Rq : Le résultat est faux si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers ∞, par exemple $n + (-1)^n$

Démonstration : C'est à peu près évident mais démonstration directe est n'est pas très clair.
En fait c'est facile avec un RA.
On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ℓ, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique et la suite $(u_n + v_n)$ N'est PAS chaotique.
Comme $(u_n + v_n)$ N'est PAS chaotique, on a : Soit $(u_n + v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, Soit $(u_n + v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

> Situations $(u_n + v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'$.

On a $v_n = (u_n + v_n) - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell' - \ell$.
Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas chaotique car elle converge vers $\ell' - \ell$. OUPS!!!

> Situations $(u_n + v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

On a $v_n = (u_n + v_n) - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty - \ell = \infty$.
Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas chaotique car elle diverge vers ∞. OUPS!!!

3 Niveau Supérieur : Bolzano-Weierstrass, Cesàro

3.1 Non-Majorée.

Les suites extraites permette de traduire, visualiser des infos "non habituelle" difficile à exploiter.

Théorème 6. Non-Majorée

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite Non-Majorée.
Ainsi avec le négation de la def de majorée, on a

CàD Pour tout M, il existe n_0 avec $u_{n_0} > M$

Cet énonce est difficile" à utiliser mais on a l'équivalence suivante

(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Non-Majorée.
(ii) il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $u_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$

Démonstration : le sens $(ii) \implies (i)$ est facile. Pour tout M, on applique la def de $u_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$ avec M

le sens $(i) \implies (ii)$ est plus intéressant

On applique la définition de Non-Majorée avec $M = k \in \mathbb{N}$ ainsi, il existe n_k tel que $u_{n_k} > k$

On obtient ainsi une suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

MAIS à priori les indices n_k ne sont pas par ordre strictement croissant.

Maintenant on va ruser

On justifie qu'il y a forcément une infinité d'indice différent.
On les classe par ordre croissant (il pourrait y avoir des répétitions)
On les choisit dans cet ordre et sans doublon
Reste à voir que cette suite qui est une suite extraite diverge vers $+\infty$

3.2 Bolzano-Weierstrass.

Théorème 7. Bolzano-Weierstrass.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite Bornée.

Alors il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

Théorème 8. Généralisation : Bolzano-Weierstrass.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
Alors il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$

qui converge dans $\mathbb{R}$ ou qui diverge vers $\pm\infty$

Démonstration : Il y a 2 situations : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, soit Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Non-bornée

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

C'est facile on applique la théorème de Bolzano-Weierstrass,

ainsi il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathbb{R}$

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Non-bornée

Comme bornée c'est majorée et minorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Non-Majorée ou Non-minorée

- Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Non-Majorée, on utilise le théorème ci dessus

ainsi il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$

- Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Non-minorée, on utilise le théorème ci-dessus

ainsi il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $\left(u_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui diverge vers $-\infty$

Application : On peut maintenant démontrer la réciproque du théorème 3, c'est la caractérisation séquentielle des limites
CàD : Si toutes les suites extraites qui convergent, convergent vers la même limite, alors la suite converge.

Il y a beaucoup trop de converge, beaucoup trop de mot compliqué (réciproque, caractérisation, séquentielle, extraites), donc BLI

3.3 Cesàro

Théorème 9. Cesàro et son final

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ.

$$\text{Alors la moyenne } S_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Plan de la démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$.

Q1. Montrer que : $\exists K,\ \exists N_0$ tq $\forall\, n \geqslant N_0,\ \left|S_n - \ell\right| \leqslant \dfrac{K}{n} + \dfrac{n-N_0+1}{n}\varepsilon$

Q2 *Final de Cesàro.* En déduire qu'il existe N_1 tq $\forall\, n \geqslant N_0$, $|S_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$. Conclure.

Réponse à Q1

On commence par un calcul "classique" : Mariage puis Inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\left|S_n - \ell\right| &= \left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} - \ell\right| \\
&= \left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n - n\ell}{n}\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|(u_1-\ell)+(u_2-\ell)+\cdots+(u_n-\ell)\right| \\
&\quad\textit{Inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\Big(|u_1-\ell|+|u_2-\ell|+\cdots+|u_n-\ell|\Big)
\end{aligned}$$

J'applique la définition de $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ avec $\varepsilon > 0$,

Ainsi $\exists\, N_0$ tq $\forall\, k \geqslant N_0$, $|u_k - \ell| \leqslant \varepsilon$

On somme cette inégalité de $k = N_0$ à $k = n$, ainsi $\displaystyle\sum_{k=N_0}^{n} |u_k-\ell| \leqslant \sum_{k=N_0}^{n} \varepsilon = (n-N_0+1)\varepsilon$

$$\text{Conclusion : } \left|S_n-\ell\right| \leqslant \frac{1}{n}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{N_0-1}|u_k-\ell|}_{=K} + (n-N_0+1)\varepsilon\right) = \frac{K}{n} + \frac{n-N_0+1}{n}\varepsilon$$

Réponse à Q2 et final de Cesàro

On est dans la situation suivante : $\begin{cases} \left|S_n-\ell\right| \leqslant M_n \\ \text{et} \\ M_n = \dfrac{K}{n} + \dfrac{n-N_0+1}{n}\varepsilon \end{cases}$

Ça ressemble au théorème de la distance mais ....

$$\text{MAIS la majoration } M_n = \frac{K}{n} + \frac{n-N_0+1}{n}\varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon \neq 0,$$

donc ce n'est pas le théorème de la distance!!!!

Voici le final de Cesàro

J'applique la définition de $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L = \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$,

Ainsi il existe N_1 tel que $\forall\, n \geqslant N_1$, $M_n \leqslant L + \varepsilon = \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Conclusion : il existe N_1 tel que $\forall\, n \geqslant N_1$, $\left|S_n-\ell\right| \leqslant M_n \leqslant 2\varepsilon$

CàD on a vérifié la def de $\left|S_n-\ell\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, CàD de $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

— Adapter la démonstration de Cesàro —

Exercice 1. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $+\infty$.

$$\text{Alors la moyenne } S_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Exercice 2. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ.

$$\text{Alors la moyenne } S_n = \frac{u_1+\frac{u_2}{2}+\cdots+\frac{u_n}{n}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Exercice 3. [Correction] *Plus difficile*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers ℓ.

$$\text{Alors la moyenne } S_n = \frac{\binom{n}{0}u_0+\binom{n}{1}u_1+\cdots+\binom{n}{n}u_n}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Exercice 4. *Vraiment plus difficile* Soient deux suites réelles (a_n) et (b_n) qui convergentes de limites respectives a et b.

$$\text{Montrer que : } \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$$

— Utiliser le thm de Cesàro —

Exercice 5. [Correction] Montrer que : Si $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, Alors $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Exercice 6. [Correction] *Plus difficile* Soient deux suites réelles (a_n) et (b_n) qui convergentes de limites respectives a et b.

$$\text{Montrer que : } \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} ab$$

Correction.

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) Plan de la démonstration : Pour tout $A > 0$.

Q1. Montrer que : $\exists K,\ \exists N_0$ tq $\forall n \geqslant N_0,\ S_n \geqslant \frac{K}{n} + \frac{n - N_0 + 1}{n} A$

Q2 *Final de Cesàro.* En déduire qu'il existe N_1 tq $\forall n \geqslant N_0,\ S_n \geqslant A - 1.$ Conclure.

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) *On utilise* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$

Plan de la démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$.

Q1. Montrer que : $\exists K,\ \exists N_0$ tq $\forall n \geqslant N_0,\ \left|S_n - \ell\right| \leqslant \frac{K}{H_n} + \frac{H_n - H_{N_0-1}}{H_n}\varepsilon$

Q2 *Final de Cesàro.* En déduire qu'il existe N_1 tq $\forall n \geqslant N_0,\ |S_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon.$ Conclure.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) *On utilise* $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ *et aussi les coefficients du binôme sont croissants puis dé-croissants.*

Plan de la démonstration : Pour tout $\varepsilon > 0$.

Q1. Montrer que : $\exists K,\ \exists N_0$ tq $\forall n \geqslant N_0,\ \left|S_n - \ell\right| \leqslant \frac{K\binom{n}{N_0}}{2^n} + \varepsilon$

Q2. Justifier $\frac{K\binom{n}{N_0}}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Q3 *Final de Cesàro.* En déduire qu'il existe N_1 tq $\forall n \geqslant N_0,\ |S_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon.$ Conclure.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

Comme la suite $a_n = u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, on sait d'après les thm de Cesàro, que

$$A_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Or $\sum_{k=1}^{n} a_k =$ télescopage $= u_{n+1} - u_1$

Conclusion : $\frac{u_{n+1} - u_1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ ainsi (à méditer) $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé) On fait <u>dans l'ordre</u> les situations suivantes

> Situation Particulière : On suppose que : $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

Comme la suite (b_n) converge donc elle est bornée par K à partir d'un certain rang N_0

Et donc u_n est bornée pour tout n par $C = \max\left(K, |b_0|, \ldots, |b_{N_0-1}|\right)$

On a maintenant

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right)\right| &\leqslant \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|b_{n-k}|\right)\\ &\leqslant C\, \underbrace{\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \quad \text{C'est le thm de Cesàro car } |a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |0| = 0\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = 0.b$$

> Situation générale : On suppose que : $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

On peut écrire $a_n = a + \varepsilon_n$ ainsi $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}\right) &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} (a + \varepsilon_k)\, b_{n-k}\right)\\ &= a\, \underbrace{\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} b \text{ C'est Cesàro}} + \underbrace{\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k\, b_{n-k}\right)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \textit{ Voir ci-dessus}} \xrightarrow[n\to\infty]{} ab + 0 = ab\end{aligned}$$