Les suites comme en term.

1 Une suite, c'est quoi?

Définition 1.
Une suite numérique (réelle ou complexe), notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
est une liste d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ indexées/numéroté sur $\mathbb{N}$

Il ne faut pas confondre : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le nombre u_n

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\underbrace{u_0}_{n=0}, \underbrace{u_1}_{n=1}, u_2, \dots, \underbrace{u_{641}}_{n=641}, \dots, \underbrace{u_{1492}}_{n=1492}, \dots, \underbrace{u_{10^{23}}}_{n=10^{23}}, \dots\right)$$

Remarque : Dans la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'indice n est un indice fantôme

Il y a deux grandes façons de définir une suite

Les suites "directes"

CàD on donne la valeur de u_n

Exemples de suites directes

> La suite constante égale à a,
CàD $(a)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a, \dots, a, ..)$, CàD $\forall\, n,\ u_n = a$

> la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, a, a^2, a^3, \dots, a^n, ..)$
CàD la suite géométrique de raison a
Ainsi on a $\forall\, n,\ u_n = a^n$

> la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (+1, -1, +1, -1, \dots, ..)$,
CàD la suite alternée
on a $\forall\, n,\ u_n = (-1)^n$

Les suites récurrentes

CàD u_{n+1} s'exprime/se calcule en fonction du terme précédent, CàD e de u_n

Exemples de suites récurrente

> Les suites arithmético-geo

> Les suites classiques d'ordre 2

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n)$

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{n}$

À méditer

> Lorsque la suite est récurrente, faire des récurrences n'est pas une mauvaise idée

> Une relation de récurrence ne se démontre pas par récurrence

Remarque : Il y a une troisième (et délicate) façon de définir une suite : c'est "à la mode bij réciproque"
CàD pour tout/chaque n, la nombre u_n est l'unique sol dans ... de l'équation .....

2 Vocabulaire sur les suites

Théorème 2.
Les propriétés sur les suites s'énoncent/se vérifient
en manipulant les nombres u_n et avec des $\mathscr{D}$omaine.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
Ssi $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\geqslant 0$

Si/Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M
Ssi $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant M$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par K
Ssi $\forall\, n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant K$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Théorème 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On a l'équivalence

$$\begin{pmatrix}\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ \text{est majorée et minorée}\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ \text{est bornée}\end{pmatrix}$$

3 Suites adjacentes.

Définition 4.
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes

Ssi on a les trois propriétés

(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(ii) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(iii) $u_n-v_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Le théorème des suites adjacentes.
Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes,
Alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ
Et en plus la limite commune ℓ sépare les deux suites
CàD $\quad u_0\leqslant u_1\leqslant....\leqslant u_n\leqslant...\leqslant\ell\leqslant...\leqslant v_n\leqslant...\leqslant v_1\leqslant v_0$

4 Distance entre u_n et ℓ

Théorème 5. Le théorème du module/de la distance.

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, n,\quad |u_n-\ell|\leqslant M_n\\[2ex] M_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0\end{array}\right\}\implies\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ converge vers } \ell$$

Exemple. On suppose que $|u_{n+1}-\ell|\leqslant c\,|u_n-\ell|$. On en déduit à la mode géo

$$\begin{aligned}|u_n-\ell|&\leqslant c\,|u_{n-1}-\ell|\\ &\leqslant c\,c\,|u_{n-2}-\ell|\\ &\ \ \vdots\\ &\leqslant c\,c\ldots c\,|u_0-\ell|=c^n\,|u_0-\ell|\end{aligned}$$

5 Exercices

5.1 Révision

Exercice 1. Pour les suites récurrentes suivantes calculer, u_n en fonction de n.

1. Classique : $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} u_n$, $\quad u_{n+1} = (u_n)^2$
2. Plus difficile : $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$

Exercice 2. [Correction] *Déjà fait en terminale mais à refaire* On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (v_n) définies par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n
   En déduire v_n en fonction de n.
2. Calculer u_n en fonction de n.
   A votre avis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 3. [Correction] *Déjà fait en terminale mais à refaire* On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (v_n) définies par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad et \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{-4\,u_n - 4}{u_n} \quad et \quad v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n
   En déduire v_n en fonction de n.
2. Calculer u_n en fonction de n.
   A votre avis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 4. *Déjà fait mais à refaire* Pour les suites récurrentes suivantes calculer, u_n en fonction de n.

> $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n + 5$
> $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3\,u_n + n$ *Bonus Difficile*

> $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
> $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.
> $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -4u_{n+1} - 4u_n$.

5.2 Somme/intégrale

Depuis le début de l'année, on a rencontré beaucoup de suite de somme ou de suite d'intégrale. (Re)-voir DM, DS et TD

Somme Harmonique.

Exercice 5. [Correction] On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty}$$

1. Étudier la monotonie de la suite.
2. Montrer $\forall\, n \geqslant 1,\ H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. On suppose que la suite (S_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
   Que devient la relation de la question Q2, quand $n \to \infty$? Que peut-on conclure ?
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 6. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty}$$

1. Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$
2. En déduire que : $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Exercice 7. On considère la suite (H_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{On va montrer que : } H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty}$$

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ e^{H_n} \geqslant n + 1$
3. En déduire que : $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Intégrale/Somme

Exercice 8. [Correction] Soit (I_n) la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_1^e (\ln t)^n \, dt$$

1. Étudier la monotonie de la suite (I_n). En déduire que la suite (I_n) converge.
2. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
3. En déduire par un RA que la suite (I_n) converge vers 0 puis déterminer la limite nI_n

Exercice 9. [Correction] Soit (S_n) la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

1. Étudier la monotonie de la suite.
2. Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N} - \{0, 1\},\ \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$
3. En déduire une majoration de la suite (S_n) puis que la suite (S_n) est majorée. Conclure.

Exercice 10. [Correction] On considère la suite (S_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Convergence *Déjà vue*
   (a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
   (b) Montrer que la suite est majorée par 1.
   (c) Conclure.
2. On va montrer que $\ell = \ln 2$
   (a) Montrer que : $\forall\, k \geqslant 2,\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$
   (b) En déduire un encadrement de S_n.
   (c) Montrer que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 2$

Exercice 11. [Correction] *Déjà fait en DM/DS* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, .., n\}$. On considère $u_k = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$

1. Simplifier u_{k+1}/u_k puis montrer que : $\forall\, k \in \{1, .., n-1\},\ \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire une majoration de u_n.
3. En déduire avec le binôme et la question Q2, que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$

Exercice 12.

1. On considère la suite (S_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} k!$$

Montrer que : $\displaystyle \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

En déduire que : $\displaystyle \frac{1}{n!} S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

2. On considère la suite (S_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

Montrer que : $\displaystyle \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

En déduire que : $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

5.3 Les suites récurrentes.

Exercice 13. *Déjà fait mais à refaire*

1. Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$
   Et expliciter a_{n+1}, b_{n+1} en fonction de a_n, b_n.
2. Montrer que : la suite (a_n) vérifie une récurrence d'ordre 2.
3. Calculer a_n en fonction de n.

Exercice 14. *La question Q1 est intéressante mais pas "facile"*

1. Montrer la suite $u_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est une suite récurrente d'ordre 2.
   En déduire que u_n est un entier par.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$
   est une suite convergente.
3. Bonus Montrer *avec le binôme* que : $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

Exercice 15. [Correction] Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \quad et \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

On considère la suite complexe de terme général $z_n = x_n + i\, y_n$.

1. Calculer z_{n+1} en fonction z_n.
2. Les suites (z_n), (x_n), (y_n) convergent-elle ?

Exercice 16. [Correction] Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_1 > 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2^n} u_n.$$

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Majorée ?
   (a) Trouver (en utilisant les question 1. et 2.), une majoration du type $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant K_n\, u_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est majorée puis qu'elle converge.

Exercice 17. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0>0$, $v_0>0$ et

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{2}{v_n} \\ v_{n+1}=2v_n+\frac{1}{2u_n}\end{cases}.$$

On montrer "facilement" par récurrence que (u_n) et (v_n) sont bien définies et que $\forall\, n,\ u_n>0$ et $v_n>0$.

1. Convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que $\forall\, n,\ v_n \geqslant 2^n v_0$.
   (b) Que peut-on conclure ?

2. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Donner une majoration de $u_{n+1}-\dfrac{1}{2}u_n$.
   (b) En déduire une majoration u_n. *(Difficile)*
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle croissante qui converge vers ℓ
Ainsi on sait que : $u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant\ell$

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\dfrac{1}{n}(u_1+u_2+\ldots+u_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$

1. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ v_n\leqslant u_n$
2. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{n+1}(u_{n+1}-v_n)$.
3. Déduire des questions Q1 et Q2 que la suite (v_n) est croissante et majorée.
   On note ℓ' sa limite
4. Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \dfrac{v_n+\ell}{2}\leqslant v_{2n}\leqslant\ell$
   En déduire que $\ell'=\ell$.

5.4 $u_{n+1}=f(u_n)$

Plan d'étude.

> On étudie les fonctions $f:x\longmapsto f(x)$ et $h:x\longmapsto f(x)-x$
> On justifie que par récurrence que la suite (u_n) est bien définie.
> On détermine les limites possibles de la suite avec l'équation $f(\ell)=\ell$.
> On étudie la monotonie par récurrence.
> On justifie avec le TAF que $|u_{n+1}-\ell|\leqslant c|u_n-\ell|$ puis on a

$$\begin{aligned}|u_n-\ell| &\leqslant c|u_{n-1}-\ell| \\ &\leqslant c\,c|u_{n-2}-\ell| \\ &\ \vdots \\ &\leqslant c\,c\ldots c|u_0-\ell| = c^n|u_0-\ell|\end{aligned}$$

Exercice 19. [Correction] *Le modèle* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0=1 \quad\text{et}\quad \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\arctan(u_n)=f(u_n)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall\, u_n\in[0,1]$.
2. Étudier les fonctions $f:x\longmapsto f(x)$ et $h:x\longmapsto f(x)-x$
3. Trouver les limites possibles de la suite.
4. Étudier la monotonie de la suite.
5. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Exercice 20. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 = f(u_n)$$

1. Étudier les fonctions $f : x \longmapsto f(x)$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).
3. On suppose que $u_0 = 0$. Calculer $u_1, u_2, \ldots$. Conclure.
4. On suppose que $u_0 \in]0,1]$
   (a) Montrer que : $\forall \geqslant 1,\ u_n \in [0,1]$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Que peut-on conclure ?
5. On suppose que $u_0 \notin [0,1]$
   (a) Montrer que $\forall\, n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 < 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

Exercice 21. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 9 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} = f(u_n)$$

1. Étudier les fonctions f et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n existe et $u_n \geqslant 1$
3. Trouver les limites possibles de la suite (u_n).
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite converge-t-elle ?
5. Déterminer k tel que $\forall\, n,\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.
   En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

Exercice 22. [Correction] Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \in [0,2] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} = f(u_n)$$

1. Étudier les fonctions f et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Montrer que $\forall\, n \geqslant 1$, le nombre u_n existe et $u_n \in \left[0, \sqrt{2}\right]$
3. Trouver les limites possibles de la suite (u_n).
4. Déterminer une relation entre $|u_{n+1} - 1|$ et $|u_n - 1|$.
   En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

5.5 Suites adjacentes

Exercice 23. Soit (S_n) la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Montrer que les suites(S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes

Peut-on en déduire que la suite (S_n) converge ?

Exercice 24. Soit les suites

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,.\,n!}$$

1. Montrer que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes.
   On note e la limite commune.
2. On suppose que $e = {}^{a}/_{b} \in \mathbb{Q}$
   En examinant $b!\,S_b \leqslant b!\,e \leqslant b!\,T_b$, en déduire OUPS.

Conclusion : $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 25. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
3. Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ

5.6 Suite définie implicitement

Exercice 26. [Correction]

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto xe^x$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(u_n) = u_n.e^{u_n} = n$
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   En déduire avec un RA que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
3. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \ln(u_n) \leqslant \ln(\ln(n))$
   En déduire un encadrement de u_n puis que $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Exercice 27. [Correction]

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $e^{u_n} + u_n = n$
2. Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$
3. Montrer que : $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé) 1. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} \\ &= \frac{\left(\frac{u_n}{3-2u_n}\right)}{\left(\frac{u_n}{3-2u_n}\right)-1} \\ &= \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n-(3-2u_n)}{3-2u_n}} = \frac{u_n}{3-2u_n} \times \frac{3-2u_n}{u_n-3} = \frac{u_n}{3u_n-3} = \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique.

On a maintenant

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{3}v_{n-1} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}v_{n-2}\right) = \frac{1}{3}\dots\frac{1}{3}\ v_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n\ v_0. \end{aligned}$$

2. On sait $\dfrac{u_n}{u_n-1} = v_n$

$\Longrightarrow u_n = v_n(u_n-1) \Rightarrow u_n(1-v_n) = v_n$

$$\text{Donc}\quad u_n = \frac{v_n}{v_n-1} = \frac{\left(1/3\right)^n\ v_0}{\left(1/3\right)^n\ v_0-1}$$

Comme $\left(1/3\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$u_n = \frac{v_n}{v_n-1} = \frac{\left(1/3\right)^n\ v_0}{\left(1/3\right)^n\ v_0-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{0}{0-1} = 0$$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé) 1. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}+2} \\ &= \frac{u_n}{-2u_n-4} \\ &= \frac{-1}{2}\frac{u_n}{u_n+2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{u_n+2} = \frac{-1}{2} + v_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est une suite arithmétique.

On a maintenant

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{-1}{2} + v_{n-1} \\ &\quad \textit{À la mod géo} \\ &= \frac{-1}{2} + \left(\frac{-1}{2} + v_{n-2}\right) \\ &= \frac{-1}{2} + \dots + \frac{-1}{2} + v_0 = \frac{-n}{2} + v_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \end{aligned}$$

2. On sait $v_n = \dfrac{1}{u_n+2} = v_n$

$\Longrightarrow \dots . \Longrightarrow u_n = -2 + \dfrac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -2 + \dfrac{1}{-\infty} = -2$

Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -2.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. pour tout n, on a $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ la suite est donc croissante

Conclusion : Soit la suite cv dans $\mathbb{R}$ Soit la suite diverge vers $+\infty$

2. Pour tout n, on a

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

3. On suppose que la suite (H_n) converge vers ℓ

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, n\in\mathbb{N}, H_{2n}-H_n\geqslant \dfrac{1}{2}\\ H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{l}\text{À la limite, quand } n\to\infty,\\ \quad\text{la relation devient } \ell-\ell\geqslant\dfrac{1}{2}\text{ OUPS}\end{array}$$

Conclusion : l'hypothèse la suite (S_n) converge vers $\ell\in\mathbb{R}$ est absurde, CàD la suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

4. On a montré que la suite (H_n) est croissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$

Conclusion : La suite (H_n) diverge vers $+\infty$

Solution de l'exercice 8 (Énoncé)

1. On a

$$I_{n+1}-I_n=\int_1^e \underbrace{(\ln t)^n}_{\geqslant 0\ sur[1,e]}\left[\underbrace{\ln t-1}_{\leqslant 0\ sur[1,e]}\right]dt\leqslant 0$$

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\ell\geqslant 0$.

2. On fait une IPP

3. On suppose que $\ell>0$. On a

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, n\in\mathbb{N},\ I_{n+1}=e-(n+1)I_n\\ I_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell\\ e-(n+1)I_n\xrightarrow[n\to\infty]{} e-\infty\ell\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{l}\text{On regarde ce que devient la relation quand } n\to\infty\\ \quad\text{Ainsi à la limite, on a}\quad \ell=e-(\infty)\ell\end{array}$$

Comme $\ell>0$, on a $(\infty)\ell=\infty$. On a donc $\ell=-\infty$ OUPS ! ! ! !

Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\geqslant 0$ et $\ell>0$ est absurde

Donc La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution de l'exercice 9 (Énoncé)

1. pour tout n, on a $S_{n+1}-S_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}>0$ la suite est donc croissante

Conclusion : Soit la suite cv dans $\mathbb{R}$ Soit la suite diverge vers $+\infty$

2. Pour tout $k\in\{\cancel{1},2,\dots,n\}$.

   > $\forall\, t\in[k-1,k],\ \dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{t^2}$

   > On intègre l'inégalité sur $[k-1,k]$,
   Ainsi $\dfrac{1}{k^2}\leqslant\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t^2}\,dt$

3. On somme l'inégalité précédent de $k=2$ à $k=n$, CàD **là où elle est valide**

$$\begin{aligned}\text{ainsi } H_n=\sum_{k=1}^{n}{}^1/_{k^2}=\underbrace{1}_{k=1}+\sum_{k=2}^{n}{}^1/_{k^2}&\leqslant 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}{}^1/_t\ dt\\ &\leqslant 1+\int_1^2+\int_2^3+\dots+\int_{n-1}^{n}\\ &\leqslant 1+\int_1^n {}^1/_{t^2}\ dt\\ &\leqslant 1+\left[{}^{-1}/_t\right]_1^n\\ &\leqslant 1+1-{}^1/_n\\ &\leqslant \underbrace{1+1-{}^1/_n}_{\text{Attention ça dépend de } n}\leqslant 2-0\end{aligned}$$

4. La suite (S_n) est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers $\ell\leqslant 2$

Solution de l'exercice 10 (Énoncé)

1. Convergence

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2}\right] - \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

La suite (S_n) est donc croissante

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} n = \frac{n}{n+1} \leqslant \frac{n}{n+0} = 1$$

La suite (S_n) est donc majorée par 1.

(c) La suite est croissante, majorée par 1 ainsi elle converge vers $\ell \leqslant 1$

2. On va montrer que $\ell = \ln 2$

(a) On va majorer les intégrales, CàD les plateaux

$$\text{Pour tout } k \geqslant 1, \text{ on a } \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\underbrace{k}}\, dt = \frac{1}{k}$$

$$\text{Pour tout } k \geqslant 2, \text{ on a } \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\, dt \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\underbrace{k}}\, dt = \frac{1}{k}$$

(b) On applique l'encadrement précédent avec $n+k$, puis o n somme les inégalités là où elles sont valides,

$$\text{ainsi Pour tout } k \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{t} dt$$

De plus

$$> G_n = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_{n+1}^{n+2} + \cdots + \int_{2n}^{2n+1} = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{t}\, dt = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

$$> D_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt = \int_{n}^{n+1} + \cdots + \int_{2n-1}^{2n} = \int_{n}^{2n} \frac{1}{t}\, dt = \ln(2n) - \ln(n) = \ln \frac{2n}{n} \ln(2)$$

(c) On a

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+o(n)}{n+o(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln 2$$

Ainsi on a

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, n,\ G_n \leqslant S_n \leqslant D_n \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} G_n = \ln 2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} D_n = \ln 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{D'après le thm des 2 gendarmes, la suite } (S_n) \text{ converge vers } \ln 2$$

Solution de l'exercice 11 **(Énoncé)**

1. Soit $k \in \{1, .., (n-1)\}$.
On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1}{n^{k+1}}\binom{n}{k+1}}{\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}} = \frac{n^k}{n^{k+1}} \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{1}{n} \frac{n-k}{k+1}$$

Directement on a

$$\frac{1}{2} - \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n(k+1) - 2(n-k)}{n(k+1)} = \frac{n(k-1) + 2k}{n(k+1)} \geqslant 0 \quad \text{car } k \geqslant 1$$

2. On a pour $n \in \{1, 2, ..., n\}$, $u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_k$

À la mode géo, on déduit que $u_k \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1} u_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

3. Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&\leqslant \underset{k=0}{\overset{1}{\sqcup}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&\leqslant 1+2\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-{}^1/_2}-1\right) \\
&= 3-4\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 3
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 15 (Énoncé)

1. On a
$$z_{n+1} = x_{n+1} + i\,y_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} + i\,\frac{x_n + y_n}{2} = (x_n + i\,y_n)\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right) z_n$$

2. La suite (z_n) est une suite géo, ainsi on a $z_n = z_0 \left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)^n$.

   On a $\left|\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ainsi

   $$\text{Ainsi } |z_n - 0| = |z_n| = |z_0|\left|\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right|^n = |z_0|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

   Conclusion : on a donc $|z_n - 0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. La suite converge (z_n) vers 0.

   De plus on sait que $|x_n - 0| = |x_n| = |\mathrm{Re}(z_n)| \leqslant |z_n|$. Ainsi la suite converge (x_n) vers 0.

Solution de l'exercice 16 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leqslant e^x$.

   Convexité

   .

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   Pour tout/chaque $n \in \mathbb{N}$, on remarque : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} u_{n-1}$

   `Donc le signe de` $u_{n+1} - u_n$ `se déduit de celui de` u_{n-1}

   On montre facilement par une récurrence à 2 étages que $H_{<n>} : u_n \geqslant 0$.

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} u_{n-1} \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

3. Majorée ?

   (a) Trouver (en utilisant les question 1. et 2.), une majoration du type $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant K_n u_n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{2^{n-1}} u_{n-1} \\ &\leqslant u_n + \frac{1}{2^{n-1}} u_n && \textit{car la suite est croissante} \\ &\leqslant u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ & \quad \textit{on utilise Q1. avec } x = e^{1/2^{n-1}} \\ &\leqslant u_n \underbrace{e^{1/2^{n-1}}}_{K_n} \end{aligned}$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) est majorée puis qu'elle converge.

   On a "À la mode géo"
$$\begin{aligned} u_n &\leqslant K_{n-1} u_{n-1} \\ &\leqslant K_{n-1} K_{n-2} u_{n-2} \\ &\ \ \vdots \\ &\leqslant K_{n-1} K_{n-2} \cdots K_0\, u_0 \end{aligned}$$

   De plus $K_{n-1}K_{n-2}\cdots K_0 = \exp\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = \exp\left(\dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{1-0}{1-\frac{1}{2}}\right) = e^2$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant e^2 u_0$

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $e^2 u_0$
   donc elle converge vers $\ell \leqslant e^2 u_0$.

Solution de l'exercice 17 (Énoncé)

1. Convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer que $\forall n,\ v_n \geqslant 2^n v_0$.

   On fait "facilement" par récurrence $H_{<n>} : v_n \geqslant 2^n v_0$

   (b) Que peut-on conclure ?

   On a avec les théorème de comparaison

$$\left.\begin{aligned} &\forall n,\ v_n \geqslant 2^n v_0 \\ &2^n v_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \textit{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ diverge vers } +\infty$$

2. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Donner une majoration de $u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n$.

   Pour tout n, on a avec ce qui précède $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + \dfrac{2}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n + \dfrac{2}{2^n v_0}$

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n \leqslant \dfrac{2}{2^n v_0} = \dfrac{K}{2^n}$

(b) En déduire une majoration u_n. *(Difficile)*

On va faire un "À la mode géo" délicat. On a

$$\begin{aligned} u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} &\leqslant \frac{K}{2^{n-1}} && (I_n)\\ u_{n-1} - \frac{1}{2}u_{n-2} &\leqslant \frac{K}{2^{n-2}} && (I_{n-1})\\ u_{n-2} - \frac{1}{2}u_{n-3} &\leqslant \frac{K}{2^{n-3}} && (I_{n-2})\\ &\vdots \\ u_1 - \frac{1}{2}u_0 &\leqslant \frac{K}{2^0} && (I_1)\end{aligned}$$

On fait la somme pondérée des inégalités, CàD $I_n + \frac{1}{2}I_{n-1} + \frac{1}{2^2}I_{n-2} + \cdots + + \frac{1}{2^{n-1}}I_0$,

Ainsi après simplification, on a

$$\begin{aligned} u_n - \frac{1}{2^n}u_0 &\leqslant \frac{K}{2^{n-1}} + \frac{K}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{K}{2^{n-1}}\\ &\leqslant \frac{K\times n}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On a $\forall\, n\in\mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{2^n}u_0 + \frac{K\times n}{2^{n-1}}}_{M_n}$

Comme $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ croissance comparée,

Conclusion (théorème des gendarmes) : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Solution de l'exercice 19 (Énoncé)

1. *Étude de $f : x \longmapsto \arctan(x)$*

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall\, x \geqslant e,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Ainsi on a le tableau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Étude de $h : x \longmapsto f(x) - x = \arctan(x) - x$

La fonction h est dérivable sur $[e,+\infty[$

et $\forall\, x \geqslant e,\ h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1 = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$

Ainsi on a le tableau

x	$-\infty$	0	∞
$h(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

2. On démontre par récurrence H<n> : le nombre u_n se calcule et $u_n \in [0,1]$

> Initialisation avec $n=0$ Pas de pb car $u_0 = 1$

> Hérédité. On suppose $H<n>$.

Comme le nombre u_n se calcule et f est définie sur $\mathbb{R}$

donc $u_{n+1} = f(u_n)$ se calcule.

De plus on a

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leqslant u_n \geqslant 1 \\ \textit{La fonction } f \textit{ est croissante sur } [0,1] \end{array}\right\} \implies f(0) \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \leqslant f(1)$$

Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = arctan(1) = \frac{\pi}{4} < 1$

Conclusion : $H<n+1>$ est vraie

3. Comme f est continue, on sait que ℓ les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\ell = f(\ell)$ et aussi que $\ell \in [0,1]$,

CàD ℓ est une solution de l'eq $h(X) = X$ dans $[0,1]$

D'après $Q1$ l'unique solution de l'équation est 0.

Conclusion : **Si** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers 0.

4. Convergence ?
   (a) On a $u_1 - u_0 = h(u_0) < 0$ d'après le tableau de variation h et $u_0 = 1$
   On démontre par récurrence H<n> : $u_{n+1} < u_n$
   > Initialisation avec $n = 0$ Pas de pb
   > Hérédité. On suppose $H < n >$.
   On a
   $$\left.\begin{array}{c} u_{n+1} < u_n \\ \textit{La fonction } f \textit{ est croissante sur } [0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}$$
   Conclusion : $H < n+1 >$ est vraie
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$

   Or D'après Q2, on a forcément $\ell = 0$.

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Solution de l'exercice 20 (Énoncé)

1. Étudier les fonctions $f : x \longmapsto f(x)$ et $h : x \longmapsto f(x) - x$
2. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).

   Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et la fonction f est continue, on sait que les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solution de l'équation $\ell = f(\ell)$

   De plus on a d'après Q1, $\ell = f(\ell) \iff h(\ell) = 0 \iff \ell = 0$

   Conclusion : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est forcément vers $\ell = 0$
3. On suppose que $u_0 = 0$. Calculer $u_1, u_2, \ldots$. Conclure.

   On a $u_1 = f(0) = 0$ et de même $u_2 = 0$ etc ...

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0.
4. On suppose que $u_0 \in]0,1]$

   (a) Montrer que : $\forall \geqslant 1,\ u_n \in [0,1]$.

   On fait par récurrence $H_{<n>} : 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

   Initialisation avec $n = 1$

   Comme $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ et que d'après le tableau de variation de f, on a $\forall \times \in [0,1],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant {}^1/_4$

   Donc $0 \leqslant u_1 = f(u_0) \leqslant {}^1/_4 \leqslant 1$

   Hérédité. C'est le même argument

   Conclusion : $\forall \geqslant 1,\ u_n \in [0,1]$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Pour tout n, on a : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

   Conclusion : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante.

   (c) Que peut-on conclure ?

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \geqslant 0$

   De plus la seule limite possible c'est 0

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0$
5. On suppose que $u_0 \notin [0,1]$

   (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 < 0$.

   On fait par récurrence $H_{<n>} : u_n \leqslant u_1 < 0$

   Initialisation avec $n = 1$

   Comme $u_0 \notin [0,1]$ et que d'après le tableau de variation de f, on a $\forall \times \notin [0,1],\ f(x) < 0$

   Donc $u_1 = f(u_0) < 1$

   Hérédité. C'est le même argument

   Conclusion : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 < 0$.

   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Pour tout n, on a : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

   Conclusion : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante.

   (c) Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

   Comme $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant u_1 < 0$, il n'est pas possible que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$ et elle est dé-croissante

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

Solution de l'exercice 22 (Énoncé) 1. *Étude de* $f : x \longmapsto \sqrt{2-x}$

La fonction f est déf/cont sur $]-\infty, 2]$ et dérivable sur $]-\infty, 2[$

et $\forall x < 2,\ f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} < 0$

Ainsi on a le tableau

x	$+\infty$	0	0
$f(x)$	∞ ↘	$\sqrt{2}$ ↘	0

Étude de $h : x \longmapsto f(x) - x = \sqrt{2-x} - x$
La fonction h est déf/cont sur $]-\infty, 2]$ et dérivable sur $]-\infty, 2[$
et $\forall\, x < 2e,\ h'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}} - 1$
$= \dfrac{-1 - 2\sqrt{2-x}}{2\sqrt{2-x}} < 0$
Ainsi on a le tableau

x	$-\infty$		1		2
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

2. On démontre par récurrence H<n> : le nombre u_n se calcule et $u_n \in \left[0, \sqrt{2}\right]$

   > Initialisation avec $n = 1$

   on sait que : $u_0 = \in [0,2]$ et d'après Q1, quand $x \in [0,2]$ alors $f(x) \in \left[0, \sqrt{2}\right]$

   Donc $u_, = f(u_0) \in \left[0, \sqrt{2}\right]$

   > Hérédité. On suppose $H < n >$.

$$\left.\begin{array}{c} 0 \leqslant u_n \geqslant \sqrt{2} < 2 \\ \textit{La fonction } f \textit{ est dé-croissante sur } [0,2] \end{array}\right\} \Longrightarrow f(0) \leqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \leqslant f(\sqrt{2}) < f(2)$$

   Comme $f(0) = 0$ et $f(2) = \sqrt{2}$

   Conclusion : $H < n+1 >$ est vraie

3. Comme f est continue, on sait que ℓ les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\ell = f(\ell)$ et aussi que $\ell \in \left[0, \sqrt{2}\right]$,

   CàD ℓ est une solution de l'eq $h(X) = X$ dans $\left[0, \sqrt{2}\right]$

   D'après $Q1$ l'unique solution de l'équation est 1.

   Conclusion : **Si** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers 1.

4. C'est le TAF sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$

Solution de l'exercice 25 (Énoncé) 1et2 On démontre par récurrence H<n> : les nombres u_n et v_n se calculent et $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

> Initialisation avec $n = 0$

OK car $0 < u_0 < v_0$

> Hérédité. On suppose $H < n >$.

Comme les nombres u_n et v_n se calculent et $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

Donc $u_{n+1} = \sqrt{\underbrace{u_n\, v_n}_{>0}}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ se calculent

De plus $u_{n+1} = \sqrt{\underbrace{u_n\, v_n}_{>0}}$ est positif car c'est une racine et

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{v_n + u_n}{2} - \sqrt{v_n\, u_n} \\ &= \frac{v_n + u_n - 2\sqrt{v_n\, u_n}}{2} \\ &= \frac{(v_n + u_n)^2 - 4\left(\sqrt{v_n\, u_n}\right)}{2\left[v_n + u_n + 2\sqrt{v_n\, u_n}\right]} = \frac{(v_n)^2 + (u_n)^2 - 2 v_n\, u_n}{Bas > 0} = \frac{(v_n - u_n)^2}{Bas > 0} > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $H < n+1 >$ est vraie

3 Pour tout n, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n + u_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0 \textit{ car } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n\, v_n} - u_n = \frac{u_n\, v_n - (u_n)^2}{\sqrt{u_n\, v_n} + u_n} = \frac{u_n\,(v_n - u_n)}{\sqrt{u_n\, v_n} + u_n} > 0 \textit{ car } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4 il est difficile de montrer que les suites sont adjacentes,

CàD montrer directement que $v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ est délicat.

On reprend la démo des suites adjacentes, CàD

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_u \leqslant v_0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_v \geqslant u_0$

On regarde ce que devient la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$,

ainsi $\ell_v = \dfrac{\ell_u + \ell_v}{2}$ donc $\ell_u = \ell_v$

Conclusion : les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell = \ell_u = \ell_v$

Solution de l'exercice 26 (Énoncé)

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto xe^x$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(u_n) = u_n.e^{u_n} = n$

   La fonction f est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$

   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(X) = n$ admet une unique solution, noté u_n

2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   Solution intuitive

   On a $f(u_n) = n < n+1 = f(u_{n+1})$ et f est croissante

   Donc $u_n < u_{n+1}$

   Le problème :

   $f(a) < f(b) \implies a < b$ ve n'est pas la définition de "f est croissante" c'est la réciproque ! ! !

   Heureusement ou exceptionnellement la réciproque c'est "presque" la contraposée donc elle est vraie

   Solution

   On a $f(u_n) = n$ et f est bijective donc $u_n = f^{-1}(n)$

   De plus comme f est bijective et croissante, on sait que f^{-1} est aussi croissante

   Conclusion : $n < n+1$ et f^{-1} est croissante donc $\underbrace{f^{-1}(n)}_{=u_n} < \underbrace{f^{-1}(n+1)}_{=u_{n+1}}$

   En déduire avec un RA que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

   On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, CàD $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

   On Ordregrandeure la relation $u_n.e^{u_n} = n$

$$\left.\begin{array}{r} \forall\, n,\ u_n.e^{u_n} = n \\ u_n.e^{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.e^{\ell} \\ n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \implies \ell.e^{\ell} = +\infty\ OUPS$$

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$, donc la suite diverge vers $+\infty$

3. Montrer que : $\forall\, n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \ln(u_n) \leqslant \ln(\ln(n))$

   Pour $n \geqslant 3$.

   On a $u_n = f^{-1}(n) > f^{-1}(e) = 1$, donc $\ln(u_n) \geqslant 0$

   On applique la fonction ln ainsi $u_n.e^{u_n} = n$ *R0*

$$\ln(u_n) + u_n = \ln(n) \quad R1$$

$$\ln(\ln(u_n)) + \ln u_n = \ln(\ln(n)) \quad R2$$

   De plus avec R2, on a $\ln(\ln(u_n)) = \ln(\ln(n)) - \ln u_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \mathscr{O}$

   Ainsi $\ln(u_n) = \ln(n) - u_n \leqslant \ln(n) - \ln(\ln(n))$

   En déduire un encadrement de u_n puis que $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

   On a avec R1, $u_n = \ln(n) - \ln(u_n)$, ainsi

$$\ln(n) - \ln\Big(\ln(n)\Big) \leqslant u_n \leqslant \ln(n)$$

   On conclut avec le théorème des 2 gendarmes

Solution de l'exercice 27 (Énoncé)

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $e^{u_n} + u_n = n$

   La fonction $f : x \longmapsto e^x + x$ est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$

   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(X) = n$ admet une unique solution, noté u_n

2. Montrer que : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

   Solution intuitive

On a $f(u_n) = n < n+1 = f(u_{n+1})$ et f est croissante

Donc $u_n < u_{n+1}$

Le problème :

$f(a) < f(b) \implies a < b$ ve n'est pas la définition de "f est croissante" c'est la réciproque ! ! !

Heureusement ou exceptionnellement la réciproque c'est "presque" la contraposée donc elle est vraie

Solution

On a $f(u_n) = n$ et f est bijective donc $u_n = f^{-1}(n)$

De plus comme f est bijective et croissante, on sait que f^{-1} est aussi croissante

Conclusion : $n < n+1$ et f^{-1} est croissante donc $\underbrace{f^{-1}(n)}_{=u_n} < \underbrace{f^{-1}(n+1)}_{=u_{n+1}}$

3. Montrer que : $\dfrac{u_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Comme $f\Big(\ln(n)\Big) = \ln(n) + n > n = f(u_n)$ donc $\ln(n) > u_n$

De même

$$f\Big(\ln(n) - \ln(\ln n)\Big) = \ln(n) - \ln(\ln n) + e^{\ln(n) - \ln(\ln n)}\ln(n) - \ln(\ln n) + \frac{n}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)} \underset{n\to\infty}{=} (n)$$

Donc à partir d'un certain rang $f\Big(\ln(n) - \ln(\ln n)\Big) < n = f(u_n)$,

Ainsi à partir d'un certain rang $\ln(n) - \ln(\ln n) < u_n$.

On conclut avec le théorème des 2 gendarmes