Le plus Gros...

1 Notion de limites, FI.

Définition 1. *Notion de limite*

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

On dit que la fonction f tend vers ℓ en a

On dit que le nombre $f(x)$ tend vers ℓ quand $x \to a$

Ssi le nombre $f(x)$ se rapproche de ℓ (et reste près de ℓ) quand x se rapproche de a.

$$\text{On note alors } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \text{ ou } \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

`Attention : "Se rapproche" ne veut pas dire "devient égale".`

Théorème

$$\text{Lorsque } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \quad \text{Alors} \quad f(\square) \xrightarrow[\square\to a]{} \ell$$

Définition 2. FI ou pas FI !!!!

> Pas FI.

$$a+\infty=\infty, \quad +\infty+\infty=+\infty, \quad a.(+\infty)=sgn(a).\infty \quad pour\ a\neq 0$$

$$\infty.\infty=\infty, \quad \frac{a}{\infty}=0.$$

> FI.

Les FI avec addition, produit, quotient : $\infty-\infty, \quad 0.\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$

Les FI avec les puissances :

$$\infty^0=e^{0\ln(\infty)}=e^{0.\infty}, \quad 1^\infty=e^{\infty\ln(1)}=e^{\infty.0}, \quad 0^0=e^{0\ln(0)}=e^{0.(-\infty)}$$

2 Les outils pour les limites

2.1 Les ordres de grandeur classiques.

Théorème 3. Aux Bornes de $\mathscr{D}$, on a

> *Comparaison des exp-ln-monôme.*

- La règle pour les fonctions est :

e^x va plus vite que x^α qui va plus vite que $\ln(x)$

- La règle pour les suites est :

a^n va plus vite que n^α qui va plus vite que $\ln n$.

> *Comparaison des monômes entre eux.*

La règle est : Comme $0 < 2 < 3b$ alors x^3 va plus vite que x^2.

Applications : Vérifier que ce sont bien des FI et compléter. Ce sont les FI classiques.

$\dfrac{e^x}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ldots\ldots$

$\dfrac{e^x}{x^3} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ldots\ldots$

$e^x x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ldots\ldots$

$e^x x^2 \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ldots\ldots$

$\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ldots\ldots$

$\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to0^+]{} \ldots\ldots$

$\ln(x)\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ldots\ldots$

$\ln(x)\sqrt{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} \ldots\ldots$

2.2 Négligeable / Petit-Gros / $o(1)$.

Définition 4. Négligeable, Gros/petit, $o(1)$

> On dit que le nombre $f(x)$ est négligeable devant le nombre $g(x)$ quand x tend vers a

$$\text{Ssi} \quad Quotient = \frac{Petit}{Gros} = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ *ou* $f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$ *ou* $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$.

$o(1)$ = c'est un $Truc$ qui tend vers 0 quand $x \to$ ...., quand $n \to \infty$
$Truc$ signifie une fonction ou une suite.

Interprétation : Lorsque $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$, CàD $Quotient = \frac{Petit}{Gros} = \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

Donc le nombre v_n devient <u>infiniment</u> plus gros que le nombre u_n.

> $Quotien = \dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{2}$ signifie que B est 2 fois plus gros que B.

> $Quotien = \dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{10}$ signifie que B est 10 fois plus gros que B.

> $Quotien = \dfrac{A}{B} = 0 = \dfrac{1}{\infty}$, Cela signifie que B est infiniment plus gros que B.

Théorème 5. Formulaire sur les petits "o".

Addition/Combinaison Linéaire.

$2\,o(x) = o(x)$
$o(4\,x^2) = o(x^2)$.

À méditer : $o(x) - o(x) = o(x)$ et $2\,o(x) - 7\,o(x) = o(x)$.

Produit.

$x^2.o(x^2) = o(x^4)$
$o(x).o(x^2) = o(x^3)$

Comparaison

$$\lambda\,o(x^2) + \mu\,o(x^3) = o\left(\text{Le plus GROS entre } \begin{matrix} x^2 \\ x^3 \end{matrix}\right)$$

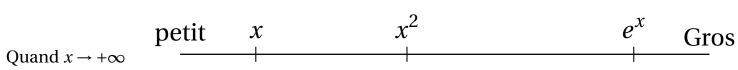
FI et petit "o"

$\dfrac{o(1)}{o(1)}$ et $\dfrac{o(Gros)}{petit}$ sont des FI

Par contre $\dfrac{o(Gros)}{gros} \longrightarrow 0$ et $\dfrac{o\big(petit\big)}{gros} \longrightarrow 0$

L'axe des dominations

On peut placer les expressions sur un axe



\> Des expressions placées sur 2 traits différents sont d'OdG différent,
il y a un qui devient infiniment plus gros que l'autre.

\> Des expressions, sur le même trait, ne sont pas forcément du même OdG.

Lorsque $^A/_B \longrightarrow 0$
alors B devient infiniment plus gros que A

Lorsque $^A/_B \longrightarrow \infty$
alors A devient infiniment plus gros que B

Lorsque $^A/_B \longrightarrow \ell \neq 0$
alors A et B sont sur le même trait, mais n'ont pas forcément le même OdG

3 Équivalent et $[1 + o(1)]$

Définition 6. Équivalent

On dit que les nombres $f(x)$, $g(x)$ sont équivalentes, CàD ont le même ordre de grandeur, quand x tend vers a

$$\text{Ssi} \quad Quotient = \frac{Petit}{Gros} = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ *ou* $f \underset{a}{\sim} g$ *ou* $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$

Interprétation : Avec les équivalents, on mesure la "vitesse" avec laquelle on va vers 0 ou $\pm\infty$.

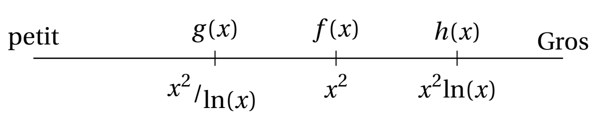
Par exemple : $\boxed{\text{quand } x \to +\infty}$

$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^2$ signifie que $f(x)$ va vers $+\infty$ quand x se rapproche de ∞ "à la manière", "à la vitesse" de x^2

$g(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{\ln(x)}$ signifie que $f(x)$ va vers $+\infty$ quand x se rapproche de ∞
"à la manière", "à la vitesse" de x^2 MAIS légèrement ralenti par $\ln(x)$

$g(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^2\ln(x)$ signifie que $f(x)$ va vers $+\infty$ quand x se rapproche de ∞
"à la manière", "à la vitesse" de x^2 *MAIS légèrement accélérée par* $\ln(x)$

Conclusion quand $x \to +\infty$, on a



Théorème 7. Autour de $\left[1+o(1)\right]$

> Attention $\sim$ ne signifie pas $=$

> Attention On n'est jamais équivalent à 0 ou à ∞.

> On sait que : $o(1)$, c'est un truc qui tend vers 0

$\left[1+o(1)\right]$, c'est un truc qui tend vers 1
Truc signifie une fonction ou une suite.

et on a $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n \left[1+o(1)\right]$

Conclusion : on manipule $\left[1+o(1)\right]$ plutôt que $\sim$

> on a le formulaire

Facteur=$Gros + 2petit - 3petit = \cdots = G_F \left[1+o(1)\right]$

$$Facteur\frac{Haut}{Bas} = G_F \left[1+o(1)\right] \frac{G_H \left[1+o(1)\right]}{G_B \left[1+o(1)\right]} = G_F \frac{G_H}{G_B} \left[1+o(1)\right]$$

Conclusion : Pour calculer un équivalent, on fait FFB

De plus

$\alpha \left[1+o(1)\right] + \beta \left[1+o(1)\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left[1+o(1)\right]^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ln \left[1+o(1)\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$e^{\left[1+o(1)\right]} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

> Lien Limite/équivalent/petit o.

Lorsque $\ell \neq 0, \infty$: $u_n \longrightarrow \ell \iff u_n = \ell + o(1) \iff u_n = \ell \left[1+o(1)\right] \iff u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ell$

Lorsque $\ell = 0$: $u_n \longrightarrow 0 \iff u_n = 0 + o(1) = o(1)$

4 Approximation linéaire.

Théorème 8.

Pour "gérer" les FI avec $\sin(0),\ \cos(1), \tan(0),\ e^0,\ \ln(1),\ \sqrt{1}$**,**
on utilise l'approximation linéaire.

Approximations linéaires des fonctions classiques : quand $x \to 0$

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x) \qquad \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) \qquad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) \qquad \tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

En physique, on oublie le petit "o"

On écrit $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

C'est l'approximation linéaire.

En math, il faut **impérativement** le petit "o"

On écrit $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$

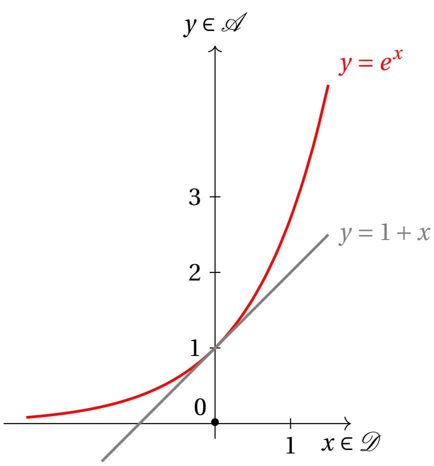
C'est une égalité et il faut savoir manipuler les petits "o".

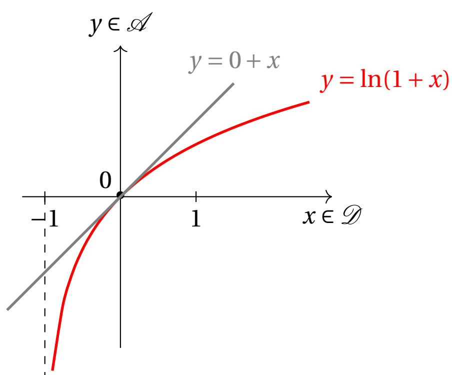
Généralisation et Interprétation géométrique.

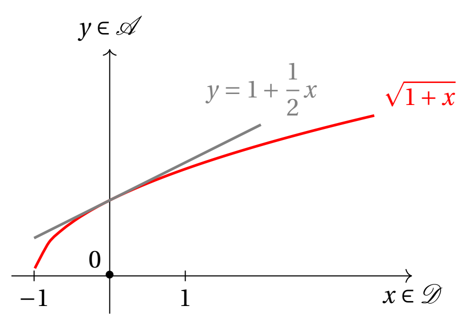
Pour les fonctions dérivables, on a la formule générale valide quand $x \to 0$

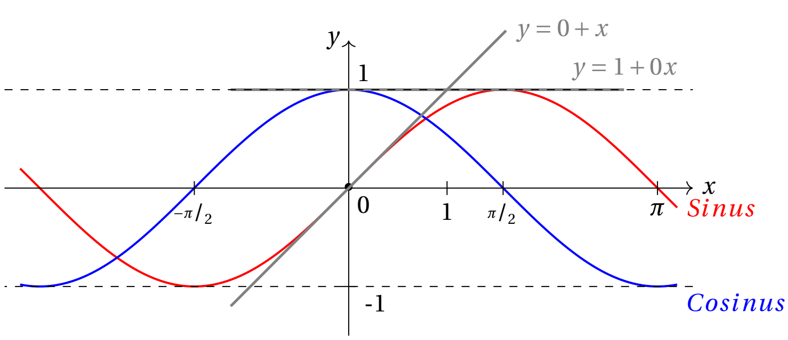
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{f(0) + f'(0)\,x}_{\text{Eq de ta tangente en 0}} + o(x)$$

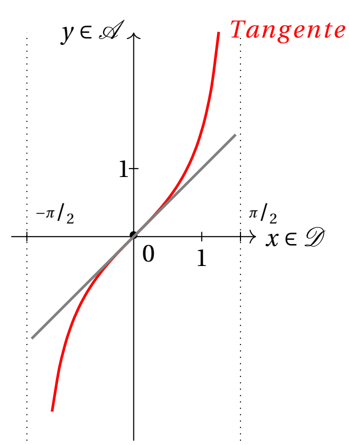
Interprétation Géométrique.











5 $\mathcal{O}(1)$, Grand "O" de 1

Définition 9. $\mathcal{O}(1)$), Grand "O" de 1

> $\mathcal{O}(1)$ = c'est un $Truc$ bornée quand $x \to$ ...., quand $n \to \infty$

$Truc$ signifie une fonction ou une suite.

Exemple : La fonction Sinus n'a pas de limite quand $x \longrightarrow \infty$ mais reste bornée

$$\text{On a donc } \sin(n) \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}(1) \text{ et } \cos(n) \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}(1)$$

> Généralisation. On dit que le nombre $f(x)$ est un grand "O" du nombre $g(x)$ quand x tend vers a

Le quotient reste bornée quand x tend vers a

On note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

théorème

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{\infty} = 0 \text{ et } \mathcal{O}(1) - \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1) \text{ et } 2\mathcal{O}(1) - 7\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$$

6 Exercices

Quand $n \to \infty$

Exercice 1. [Correction] Placer sur un axe du plus Gros au plus petit

petit $\longleftrightarrow$ Gros

> $\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ \dfrac{1}{2^n},\ \dfrac{\ln n}{n\sqrt{n}},\ 1,\ \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

> $n,\ n(\ln n)^2,\ \dfrac{n}{\sqrt{n}},\ n^2\sqrt{\ln n},\ n^2\ln n,\ o\left(\sqrt{n}\right)$

> $\ln(n),\ \ln(n^2),\ \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right),\ (\ln n)^2$

Rappel :

Lorsque ${}^{A}/_{B} \longrightarrow 0$
alors B devient infiniment plus gros que A

Lorsque ${}^{A}/_{B} \longrightarrow \infty$
alors A devient infiniment plus gros que B

Lorsque ${}^{A}/_{B} \longrightarrow \ell$
alors A et B sont sur le même trait
Mais n'ont pas forcément le même OdG

Exercice 2. [Correction] Déterminer, quand $n \longrightarrow \infty$, la limite des expressions suivantes et Bonus leur équivalent

$$u_n = n^2 + (1-2n)^3$$

$$u_n = \frac{(1+2n)^3 + (1-2n)^3}{2^n + 3^n}$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{n}{3n^3 + 2n + 1}$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{4}{n+1}$$

$$u_n = \frac{n\ln(n) + n^2}{2^{-n} + \ln(n)}$$

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$

$$u_n = \frac{2^{-n} + 3^{-n}}{2^n + 3^n}$$

$$u_n = \frac{n^3 + 3^n}{2^{2n}}$$

$$u_n = \frac{(n+1)\sin(n)}{n^2 + 1}$$

$$u_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$$

$$u_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)$$

$$u_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$u_n = 3n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

$$u_n = n^{\sin(n)/n}$$

—— Quand $x \to 0$ ou $x \to \pm\infty$ ou $x \to a$ ——

Exercice 3. [Correction] Placer sur un axe du plus Gros au plus petit

petit ———————————————————————— Gros

Quand $x \longrightarrow 0$.

> x, 1 et $\sqrt{x}$ et x^2 et $x\sqrt{x}$
> $\dfrac{1}{x^2}$ et 3 et $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ et $\dfrac{2}{x}$
> $\dfrac{3}{x^2}$ et $\dfrac{1}{2x^2}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{x}$ et x et e^x
> $\ln(x)$ et $\ln(x^2)$ et $\ln^2(x)$.
> $\ln(x)$ et $\ln(2x)$ et $\ln(x+2)$ et $2\ln(x)$.
> 1 et e^{x+1} et $\ln(1+x)$ et $\sin(2x)$ et $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Les mêmes quand $x \longrightarrow +\infty$ et quand $x \longrightarrow -\infty$

Rappel :

Lorsque ${}^{A}/_{B} \longrightarrow 0$
alors B devient infiniment plus gros que A

Lorsque ${}^{A}/_{B} \longrightarrow \infty$
alors A devient infiniment plus gros que B

Lorsque ${}^{A}/_{B} \longrightarrow \ell$
alors A et B sont sur le même trait
Mais n'ont pas forcément le même OdG

Exercice 4. [Correction] Calculer les limites suivantes quand $x \longrightarrow a$ et et Bonus leur équivalent

1. $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ avec $a = \pm\infty, 0, 1$
2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+x+3}{x+1}\right)$ avec $a = \pm\infty, 0, 3, -1$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$ avec $a = 0, 1^-, -1^+$
4. $f(x) = x^2 e^{-x}$ avec $a = \pm\infty, 0, +1$
5. $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x - 1}$ avec $a = \pm\infty, 0^+, +1$
6. $f(x) = \dfrac{e^x + x^4}{e^{-x} + x}$ avec $a = \pm\infty, 0, +1$
7. $f(x) = x + \ln(x+3)$ avec $a = +\infty, 0, -3$
8. $f(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ avec $a = +\infty, 0^+$

—— a^{bouge} ——

Exercice 5. [Correction]

1. Calculer la limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ quand $n \to \infty$
2. Calculer la limite de $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ quand $x \to o^+$
3. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la limite de $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ quand $x \to 0^+$