Programme de colle de la semaine 12

du Lundi 15 Décembre au Vendredi 19 Décembre.

Questions de cours.

> Autour de "petit o".

Définition $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(v_n\right)$. C'est quoi $o(1)$

Démonstration de : $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(2^n\right)$

Exemple de demo possible

1. Montrer qu'il existe un rang N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}u_n$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang N_0
   En déduire qu'elle converge vers $\ell \geqslant 0$
3. Démontrer que $\ell = 0$

> Notion de "équivalent".

Définition $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Sens et utilisation de $\left[1+o(1)\right]$

Démonstration de : Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0^+$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang

> Approximation linéaire.

Signification géométrique de l'approximation linéaire. Équation de la droite tangente en $x = 0$

les formules d'approximation linéaires classiques : $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\exp(x)$, $\ln(1+x)$, $\sqrt{1+x}$

Application : Déterminer la limite de : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et/ou de : $2^{n-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$

> Divise. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$

Démontrer que : a divise $b \implies 1 \leqslant a \leqslant b$

En déduire que, sur $\mathbb{N}^*$, la relation divise est anti-symétrique

Démontrer que, sur $\mathbb{N}^*$, la relation a divise b est une relation d'équivalence.

> Autours de $div_+(n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $div_+(n)$, la liste des diviseurs positifs de n

Déterminer $div_+(0)$ et $div_+(1)$

Soit $n \geqslant 2$.

Montrer que : $n = ab$ et $2 \leqslant a \leqslant b$ alors $2 \leqslant a \leqslant \sqrt{n} \leqslant b$

En déduire que les diviseur vont par paire

Application : le nombre de diviseur de n est impair Ssi n est un carrée

> Division Euclidienne.

Énoncer et démontrer la division euclidienne.

> L'ensemble $div_+(n, n')$.

Définition l'ensemble $div_+(n, n')$.

Énoncer le théorème le plus important de l'arithmétique

On suppose que : $a = bq + r$. Démontrer que : $div_+(a, b) = div_+(b, r)$

> Algorithme d'Euclide Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Décrire l'algorithme d'Euclide et comment il permet de déterminer les coefficients de Bézout.

Exercices.

Des suites et des calculs de limites avec "petit o", les $\underset{n\to\infty}{\sim}$, croissance comparée.

De l'arithmétique.