Exercice 1. [Correction] On considère la suite (I_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2}\,dx$

1. Justifier que la suite I_n est bien définie et calculer I_0

   Rappel : L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se calcule Ssi la fonction $f : x \longmapsto f(x)$ est continue sur $[a,b]$

2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{-1}{e} + (n+1)I_n$.

3. Convergence de la suite (I_n).
   (a) Étudier la monotonie de la suite (I_n).
   En déduire que la suite (I_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$
   (b) Montrer, à l'aide d'un RA, que $\ell = 0$

4. Convergence de la suite (I_n) par une autre méthode
   (a) Montrer que la suite (I_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$
   (b) À l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_a^b t^n g(t)\,dt$
   où g est une fonction à préciser, ainsi que les nouvelles bornes de l'intégrale.
   (c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   En déduire que : la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier a_n telle que : $I_n = n! - \dfrac{a_n}{e}$.

6. À l'aide de la question Q4c, montrer que $\forall\, n \geqslant 2,\ a_n = \lfloor e.n! \rfloor$

Exercice 2. [Correction] On va étudier la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = \cos(2^n)$.

1. Montrer que la suite (U_n) vérifie la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2\,(U_n)^2 - 1$
2. Déterminer les limites possibles de la suite (U_n)
3. On suppose que la suite (U_n) est converge vers 1.
   On admet que $\forall\, n,\ U_n \neq 1$.

   On va étudier la suite (V_n) définie par $V_n = |U_n - 1| = |U_n - L|$

   (a) Simplifier $\dfrac{U_{n+1}-1}{U_n - 1}$. En déduire la limite $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$
   (b) Montrer que : $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\quad V_{n+1} \geqslant 3\,V_n$
   (c) En déduire que la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.
   (d) Que peut-on conclure ?

4. On suppose que la suite (U_n) est converge vers $L = \dfrac{-1}{2}$.

   On admet que $\forall\, n,\ U_n \neq \dfrac{-1}{2}$.

   En utilisant la suite (W_n) définie par $W_n = |U_n - L| = \left|U_n - \left(\dfrac{-1}{2}\right)\right| = \left|U_n + \dfrac{1}{2}\right|$ et en suivant la même démarche, montrer que l'hypothèse est absurde.

5. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique

Exercice 3. [Correction] Soit (u_n) une suite de réels non nuls. On lui associe la suite (p_n) définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 u_2 \dots u_n.$$

On dit que le produit (p_n) converge Ssi la suite (p_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ **ET en plus** $\ell \neq 0$.
Sinon on dit que le produit (p_n) diverge.

1. **Un petit résultat et sa réciproque.**
   (a) Simplifier le quotient $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$. En déduire que

   $$\Big[\text{ Le produit } (p_n) \text{ converge vers } \ell \neq 0\Big] \implies \Big[\text{ La suite } (u_n) \text{ converge vers } 1\Big]$$

   (b) Étude de la réciproque
   On considère le produit (p_n) défini par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$
   i. Calculer p_n.
   ii. La produit (p_n) converge-t-il ? La réciproque de la question 1.a est-elle vraie ?.

2. **Un exemple avec des puissances.** On considère un réel $a > 0$ et que $a \neq 1$.
   On considère le produit (p_n) défini par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$
   (a) Montrer que :$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$
   (b) Est ce que le produit (p_n) converge ?

3. **Un exemple avec de la trigo.** On considère un réel $a \in \,]0, \pi[$.
   On considère le produit (p_n) défini par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}$
   On va étudier la suite (g_n) définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ g_n = p_n.\sin\dfrac{a}{2^n}$.
   (a) Montrer que $g_{n+1} = \dfrac{1}{2}g_n$
   (b) En déduire que le produit (p_n) converge et calculer sa limite.

4. **Un exemple avec des intégrales.**
   Soient le produit (p_n) et la suite (S_n) définis par : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   $$p_n = \prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}.$$

   (a) Étudier les variations sur $[3, +\infty[$ de la fonction f définie par $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
   (b) En déduire que : $\forall\, k \geqslant 3,\ \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\ln k}{k}$
   (c) Déterminer une primitive sur $[3, +\infty[$ de $\dfrac{\ln x}{x}$.
   En déduire une minoration de S_n puis que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.
   (d) Exprimer le nombre p_n en fonction du nombre S_n. En déduire la nature du produit (p_n)

Exercice 4. [Correction] On va étudier la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = \cos(2^n)$.

1. Montrer que la suite (U_n) vérifie la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2\,(U_n)^2 - 1$
2. Déterminer les limites possibles de la suite (U_n)
3. On suppose que la suite (U_n) est converge vers 1.
   On admet que $\forall\, n,\ U_n \neq 1$.

   On va étudier la suite (V_n) définie par $V_n = |U_n - 1| = |U_n - L|$

   (a) Simplifier $\dfrac{U_{n+1}-1}{U_n-1}$. En déduire la limite $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$

   (b) Montrer que : $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\quad V_{n+1} \geqslant 3\,V_n$

   (c) En déduire que la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.

   (d) Que peut-on conclure ?
4. On suppose que la suite (U_n) est converge vers $L = \dfrac{-1}{2}$.

   On admet que $\forall\, n,\ U_n \neq \dfrac{-1}{2}$.

   En utilisant la suite (W_n) définie par $W_n = |U_n - L| = \left|U_n - \left(\dfrac{-1}{2}\right)\right| = \left|U_n + \dfrac{1}{2}\right|$ et en suivant la même démarche, montrer que l'hypothèse est absurde.
5. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique

Exercice 5. [Correction] On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n)$$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
2. Soit $a > 0$. Montrer, à l'aide d'un DES, que : $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\frac{1}{2}}{a-\frac{1}{2}}\right)$
3. Déterminer a, b tel que : $\forall\, t \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right],\ \dfrac{t^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2} = a + \dfrac{b}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2}$

   En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{t^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2}\, dt = v_n - v_{n+1}$
4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, t \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right],\ n(n+1) \leqslant \left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2 - t^2$

   En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}*,\ 0 \leqslant v_n - v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$
5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $K > 0$

Conclusion : On a démontré que : $\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} K > 0$

Exercice 6. [Correction] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par :

$$0 < u_0 < v_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}\, v_n} \end{cases}$$

Il n'y a pas d'erreur d'indice.

1. Convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Montrer que : Pour tout n, les nombres u_n et v_n existent.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |v_{n+1} - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}|v_n - u_n|$.
   (d) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
2. On va calculer ℓ, la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer qu'il existe un un unique $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(\alpha) = {}^{u_0}/_{v_0}$
   (b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_0 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$ et $u_n = v_n \times \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$.
   (c) On considère $p_n = v_n \times \sin\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$. Montrer que la suite (p_n) est géométrique.
   En déduire une simplification du nombre v_n puis la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. [Correction] On considère les suites (a_n) et (b_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt \quad ET \quad b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos t)^n \, dt$$

1. Autour de la suite (a_n).
   (a) Calculer a_2.
   (b) Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$
   (c) En écrivant $\cos^{n+2}(t) = \cos(t)\cos^{n+1}(t)$, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$
   (d) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, a_{n+1} a_n = \dfrac{\pi}{2}$
   en déduire que : $\ell = 0$
2. Comparaison entre a_{2n} et b_{2n}.
   (a) Montrer que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \sin t \geqslant \dfrac{2}{\pi} t$.
   (b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant b_{2n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(a_{2n} - a_{2n+2})$.
   (c) En déduire que : $\dfrac{b_{2n}}{a_{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Un joli résultat.
   (a) Montrer que : $\forall\, n\mathbb{N},\ a_{2n+2} = (2n+1)(n+1)b_{2n} - (2n+2)(n+1)b_{2n+2}$
   (b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{(n+1)^2} = 2\left(\dfrac{b_{2n}}{a_{2n}} - \dfrac{b_{2n+2}}{a_{2n+2}}\right)$
   (c) On considère la suite (S_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$
   Montrer que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\pi^2}{6}$

Solution de l'exercice 1 (Énoncé) 1. Justifier que la suite I_n est bien définie et calculer I_0

Comme la fonction : $x \longmapsto \dfrac{\ln^n(x)}{x^2}$ est continue sur $[1, e]$,

l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2}\, dx$ se calcule

$$I_0 = \int_1^e \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$$

2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{-1}{e} + (n+1)I_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^{n+1}(x)}{x^2}\, dx$.

On fait une IPP avec

$$u = \ln^{n+1}(x) \rightsquigarrow\ u' = \frac{1}{x}\,(n+1)\ln^n(x)$$

$$v' = \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow\ v = \frac{-1}{x}$$

3. Convergence de la suite (I_n).

(a) Étudier la monotonie de la suite (I_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e \frac{\ln^{n+1}(x)}{x^2}\, dx - \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2}\, dx = \int_1^e \underbrace{\frac{\ln^n(x)}{x^2}}_{\geqslant 0 \ sur\ [1,e]}\ \underbrace{[\ln(x) - 1]}_{\leqslant 0\ sur\ [1,e]}\, dx \leqslant 0$$

Conclusion : La suite $(I_)$ est dé-croissante.

En déduire que la suite (I_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \displaystyle\int_1^e \underbrace{\frac{\ln^n(x)}{x^2}}_{\geqslant 0\ sur\ [1,e]}\, dx$

Conclusion : La suite $(I_)$ est positive et dé-croissante donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$

(b) Montrer, à l'aide d'un RA, que $\ell = 0$

On fait une RA. On suppose que $\ell \neq 0$

On sait que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. On va Ordegranderer

$$\left.\begin{array}{r} I_{n+1} = \dfrac{-1}{e} + (n+1)I_n \\ I_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \dfrac{-1}{e} + (n+1)I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{-1}{e} + (+\infty)\ell = \infty \text{car } \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow\ \ell = \infty\ OUPS$$

Conclusion : $\ell = 0$

4. Convergence de la suite (I_n) par une autre méthode

(a) À l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$

On fait le changement de variable et on obtient : $I_n = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2}\, dx = \int_0^1 t^n\, e^{-t}\, dt$

(b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

> Pour tout $t \in [0, 1]$,
$0 \leqslant e - t \leqslant e^{-0} = 1$ ainsi on a $0 \leqslant t^n\, e^{-t} \leqslant t^n$

> On intègre l'inégalité de $t = 0$ à $t = 1$

Ainsi $0 \leqslant I_n \leqslant\leqslant \underbrace{\displaystyle\int_0^1 t^n\, dt}_{=\frac{1}{n}}$

En déduire que : la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

Le théorème des 2 gendarmes conclut facilement

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier a_n telle que : $I_n = n! - \frac{a_n}{e}$.

On fait par récurrence $H_{<n>}$: il existe un entier a_n telle que : $I_n = n! - \frac{a_n}{e}$.

Initialisation $n = 0$

Comme $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$ donc $a_0 = 1$ convient et $H_{<0>}$ est vraie

Hérédité On suppose $H_{<n>}$

On va montrer $H_{<n+1>}$

$$\begin{aligned} \text{On a } I_{n+1} &= \frac{-1}{e} + (n+1)I_n \\ &= \frac{-1}{e} + (n+1)\left[n! - \frac{a_n}{e}\right] \\ &= (n+1)! - \frac{(n+1)a_n + 1}{e} \end{aligned}$$

Je choisis $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$.

C'est bien un entier qui convient, CàD $I_{n+1} = (n+1)! - \frac{a_{n+1}}{e}$. Conclusion : $H_{<n+1>}$ est vraie

6. À l'aide de la question Q4c, montrer que $\forall\, n \geqslant 2,\ a_n = \lfloor e.n! \rfloor$

On a : $I_n = n! - \frac{a_n}{e}$ et $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

Ainsi lorsque $n \geqslant 2$, on a $0 \leqslant n! - \frac{a_n}{e} \leqslant \frac{1}{n+1}$

On ré-organise

$$\iff 0 \leqslant e(n!) - a_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

$$\iff a_n \leqslant e(n!) \leqslant a_n + \frac{e}{n+1}$$

Or $e \approx 2.71 < 3$ *donc* $\frac{e}{n+1} < \frac{3}{2+1} = 1$

$$\iff a_n \leqslant e(n!) < a_n + 1$$

Conclusion : $\forall\, n \geqslant 2,\ a_n = \lfloor e.n! \rfloor$

Solution de l'exercice 2 (Énoncé)

1. Montrer que la suite (U_n) vérifie la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2\,(U_n)^2 - 1$

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } U_{n+1} &= \cos 2^{n+1} \\ &= \cos\left(2.2^n\right) \\ &= 2\cos^2\left(2^n\right) - 1 = 2\,(U_n)^2 - 1\end{aligned}$$

2. Déterminer les limites possibles de la suite (U_n)

Comme $U_{n+1} = f(U_n)$ et la fonction f est continue, on sait que les limites possible de la suite (U_n) sont solution de l'équation $L = f(L)$

$$\begin{aligned}&L = f\,(L) \\ &\iff L = 2L^2 - 1 \iff L = \frac{-1}{2} \text{ ou } L = 1\end{aligned}$$

Il y a donc deux limites possibles $L = \dfrac{-1}{2}$ ou $L = 1$

3. On suppose que la suite (U_n) est converge vers 1. (On admet que $U_n \neq 0$).

(a) Simplifier $\dfrac{U_{n+1}-1}{U_n-1}$. En déduire la limite $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$

$$\begin{aligned}\text{On a } \frac{U_{n+1}-1}{U_n-1} = \frac{2\,(U_n)^2-2}{U_n-1} &= 2\frac{(U_n)^2-1}{U_n-1} \\ &= 2\frac{a^2-b^2}{U_n-1} = 2\,(U_n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\,(1+1) = 4.\end{aligned}$$

Ainsi on a $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \left|\dfrac{U_{n+1}-1}{U_n-1}\right| = |2\,(U_n+1)| \xrightarrow[n\to\infty]{} |4| = 4$

(b) Montrer que : $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\quad V_{n+1} \geqslant 3\,V_n$

On applique la définition $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$ avec $\varepsilon = 1 > 0$

$$\text{Ainsi il existe } N_0,\ \forall\, n \geqslant N_0,\ \frac{V_{n+1}}{V_n} \geqslant \ell - \varepsilon = 4 - 1 = 3$$

(c) En déduire que la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.

On a "à la mode geo"

$$\begin{aligned}V_{n+1} &\geqslant 3V_n \\ &\geqslant 3.\left(3V_{n-1}\right) \\ &\geqslant 3.3...3V_{N_0} \geqslant ... \geqslant 3^{n-N_0+1}V_{N_0} = 3^n \times \text{Constante.}\end{aligned}$$

(d) Que peut-on conclure ?

On vient de montrer que : $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

MAIS on a supposé que $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ donc $V_n = |U_n - 1| \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 - 1| = 0$ OUPS

Conclusion : La suite (U_n) ne converge pas vers 1

4. On suit la même démarche en étudiant la suite $W_n = \left|U_n - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|U_n + \dfrac{1}{2}\right|$

On trouve que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} |-2| = 2$

Ainsi À partir du rang N_1, on a $W_{n+1} \geqslant 1.5\,W_n$

Puis à la mode géo $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

MAIS on a $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc c'est donc OUPS

Conclusion : (U_n) ne converge pas vers $\dfrac{-1}{2}$.

5. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique

La suite (U_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$

La suite (U_n) est bornée (car $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant cos(x) \leqslant 1$) donc elle ne diverge pas vers ∞

Conclusion : la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique.

Solution de l'exercice 3 (Énoncé)

1. (a) Simplifier le quotient $\frac{p_n}{p_{n-1}}$.

   On a facilement $\frac{p_n}{p_{n-1}} = u_n$

   En déduire que $\left[\text{Le produit } (p_n) \text{ converge vers } \ell \neq 0\right] \implies \left[\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 1\right]$

   On suppose que $p_n \underset{n \to +\infty}{\to} \ell \neq 0$

   $\boxed{\text{On veut montrer que } u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$

   On a $\frac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1}$

   Ainsi on a $u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ell}{\ell}_{\text{car } \ell \neq 0} = 1$

   (b) Étude de la réciproque

   On considère le produit (p_n) défini par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

   i. Calculer p_n.

   On a facilement $p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)$

   $$= \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \ldots . \times \frac{(n+1)}{n} = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

   ii. La produit (p_n) converge-t-il ? La réciproque de la question 1.a est-elle vraie ?.

   On a $p_n = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

   On a donc ici $u_n = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et le produit (p_n) ne converge pas

   Conclusion : La réciproque est fausse car cet exemple est un contre exemple

2. **Un exemple avec des puissances.** On considère un réel $a > 0$ et que $a \neq 1$.

   On considère le produit (p_n) défini par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$

   (a) Montrer que :$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$

   On fait par récurrence

   $$H\langle n\rangle : p_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$$

   Initialisation $n = 1$.

   On a facilement $p_1 = 1 + a^2$ et $\frac{1-a^{2^2}}{1-a^2} = \frac{1-a^4}{1-a^2} = \frac{\left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)}{1-a^2} = 1+a^2$

   Donc $H_{<1>}$ est vraie

   Hérédité. On suppose $H\langle n\rangle$, CàD $p_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$

   $\boxed{\text{On veut montrer } H\langle n+1\rangle \text{, CàD } p_{n+1} = \frac{1-a^{2^{n+2}}}{1-a^2}}$

   On a $p_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}\left(1+a^{2^k}\right) = p_n \times \left(1+a^{2^{n+1}}\right)$

   $$= \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}\left(1+a^{2^{n+1}}\right)$$

   $$= \frac{1^2-\left(a^{2^{n+1}}\right)^2}{1-a^2} = \frac{1^2-a^{2^{n+1}.2}}{1-a^2} = \frac{1-a^{2^{n+2}}}{1-a^2} \quad Fini$$

   (b) Est ce que le produit (p_n) converge ?

Si $a>1$, $p_n=\dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2} \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{-a^{2^{n+1}}\left[1+o(1)\right]}{1-a^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $1-a^2<0$

Si $a\in\,]0,1[$, $p_n=\dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2} \underset{n\to\infty}{=} \dfrac{1\left[1+o(1)\right]}{1-a^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-a^2}>0$ car $1-a^2>0$

3. Soit a un réel tel que $a\in\,]0,\pi[$. On considère le produit (p_n) défini par

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}$$

On considère la suite (g_n) définie par $g_n=p_n.\sin\dfrac{a}{2^n}$.

(a) Montrer que $g_{n+1}=\dfrac{1}{2}g_n$

On a : $g_{n+1}=p_{n+1}.\sin\dfrac{a}{2^{n+1}}$

$=p_n\left(\cos\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)\sin\dfrac{a}{2^{n+1}}$

Or on sait que $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$

Ainsi on a $\cos\dfrac{a}{2^{n+1}}\sin\dfrac{a}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left[\sin\dfrac{a}{2^n}-\sin 0\right]=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{a}{2^n}$

$=\dfrac{1}{2}p_n.\sin\dfrac{a}{2^n}=\dfrac{1}{2}g_n$

(b) En déduire que le produit (p_n) converge et calculer sa limite.

On a maintenant : $g_n=\dfrac{1}{2}g_n=.....=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}g_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cos\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{a}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\sin a$

Ainsi on a $p_n=\dfrac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}}$ On a maintenant

$$p_n=\frac{\sin a}{2^n\sin\frac{a}{2^n}} \underset{n\to\infty}{=} \frac{\sin a}{2^n.\frac{a}{2^n}[1+o(1)]}=\frac{\sin a}{a}[1+o(1)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin a}{a}\neq 0.$$

4. Soient le produit (p_n) et la suite (S_n) définis par

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k} \quad \text{et} \quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k}.$$

(a) On étudie la fonction et on conclut que la fonction $f:x\longmapsto f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ est dé-croissante sur $[3,+\infty[$

(b) En déduire que : $\forall\,k\geqslant 3$, $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\ln k}{k}$ On suppose que $k\geqslant 3$

$>$ Pour tout $t\in[k,k+1]$

$$\text{On a}\quad \frac{\ln x}{x}=f(x)\leqslant f(k) \quad \text{car la fonction } f \text{ est décroissante, ici } k\geqslant 3$$
$$\leqslant\frac{\ln k}{k}$$

$>$ On intègre l'inégalité sur $[k,k+1]$

$$\text{Ainsi ,}\int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\ln k}{k}dt \;=base\times hauteur$$
$$=\frac{\ln k}{k}$$

(c) Déterminer une primitive sur $[3,+\infty[$ de $\dfrac{\ln x}{x}$.

On a : $\dfrac{\ln x}{x}=\square'\,\square\rightsquigarrow\dfrac{(\ln x)^2}{2}$

On somme l'inégalité précédente de $k = 3$ àk=n

$$\text{Ainsi} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \geqslant \underbrace{\ldots}_{k=1} + \underbrace{\ldots}_{k=2} + \sum_{k=3}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\ln k}{k} dt$$
$$\geqslant \frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \int_{3}^{n+1} \frac{\ln k}{k} dt$$
$$\geqslant \frac{\ln 2}{2} + \left[\frac{1}{2} \ln^2 (k)\right]_3^{n+1}$$
$$\geqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \ln^2 (n+1) - \frac{1}{2} \ln^2 (3)$$
$$\geqslant Cons\tan te + \frac{1}{2} \ln^2 (n+1)$$

Comme $Cons\tan te + \frac{1}{2} \ln^2 (n+1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a bien $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(d) Exprimer le nombre p_n en fonction du nombre S_n. En déduire la nature du produit (p_n)

On a

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k} = \prod_{k=1}^{n} (k)^{\frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^{n} e^{k \ln k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} k \ln k\right) = e^{S_n}$$

Ainsi $\mathcal{P}_n = e^{S_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{+\infty} = +\infty$.

Solution de l'exercice 4 (Énoncé)

1. Montrer que la suite (U_n) vérifie la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2\,(U_n)^2 - 1$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} = \cos 2^{n+1}$
   $$= \cos\left(2.2^n\right)$$
   $$= 2\cos^2\left(2^n\right) - 1 = 2\,(U_n)^2 - 1$$

2. Déterminer les limites possibles de la suite (U_n)

   Comme $U_{n+1} = f(U_n)$ et la fonction f est continue, on sait que les limites possible de la suite (U_n) sont solution de l'équation $L = f(L)$
   $$L = f\,(L)$$
   $$\iff\ L = 2L^2 - 1 \iff L = \frac{-1}{2} \text{ ou } L = 1$$

   Il y a donc deux limites possibles $L = \dfrac{-1}{2}$ ou $L = 1$

3. On suppose que la suite (U_n) est converge vers 1. (On admet que $U_n \neq 0$).

   (a) Simplifier $\dfrac{U_{n+1} - 1}{U_n - 1}$. En déduire la limite $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$

   On a $\dfrac{U_{n+1} - 1}{U_n - 1} = \dfrac{2\,(U_n)^2 - 2}{U_n - 1} = 2\dfrac{(U_n)^2 - 1}{U_n - 1}$
   $$= 2\frac{a^2 - b^2}{U_n - 1} = 2\,(U_n + 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\,(1+1) = 4.$$
   Ainsi on a $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \left|\dfrac{U_{n+1} - 1}{U_n - 1}\right| = |2\,(U_n + 1)| \xrightarrow[n\to\infty]{} |4| = 4$

   (b) Montrer que : $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\quad V_{n+1} \geqslant 3\,V_n$

   On applique la définition $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$ avec $\varepsilon = 1 > 0$

   Ainsi il existe $N_0,\ \forall\, n \geqslant N_0,\ \dfrac{V_{n+1}}{V_n} \geqslant \ell - \varepsilon = 4 - 1 = 3$

   (c) En déduire que la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.

   On a "à la mode geo"
   $$V_{n+1} \geqslant 3V_n$$
   $$\geqslant 3.\left(3V_{n-1}\right)$$
   $$\geqslant 3.3...3V_{N_0} \geqslant ... \geqslant 3^{n-N_0+1}V_{N_0} = 3^n \times \text{Constante}.$$

   (d) Que peut-on conclure ?

   On vient de montrer que : $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

   MAIS on a supposé que $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ donc $V_n = |U_n - 1| \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 - 1| = 0$ OUPS

   Conclusion : La suite (U_n) ne converge pas vers 1

4. On suit la même démarche en étudiant la suite $W_n = \left|U_n - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| = \left|U_n + \dfrac{1}{2}\right|$

   On trouve que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} |-2| = 2$

   Ainsi À partir du rang N_1, on a $W_{n+1} \geqslant 1.5\,W_n$

   Puis à la mode géo $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

   MAIS on a $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc c'est donc OUPS

   Conclusion : (U_n) ne converge pas vers $\dfrac{-1}{2}$.

5. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique

   La suite (U_n) ne converge pas dans $\mathbb{R}$

   La suite (U_n) est bornée (car $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant cos(x) \leqslant 1$) donc elle ne diverge pas vers ∞

   Conclusion : la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est chaotique.

Solution de l'exercice 5 (Énoncé)

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   C'est un calcul classique

2. Soit $a > \frac{1}{2}$. Montrer, à l'aide d'un DES, que : $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \frac{1}{2}}{a - \frac{1}{2}}\right)$

   Pour $t > {}^{1}/_{2}$, on a $\displaystyle\frac{1}{a^2 - t^2} = \frac{-1}{(t-a)(t+a)} = \frac{{}^{2}/_{a}}{(t+a)} - \frac{{}^{2}/_{a}}{(t-a)}$

   Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{a^2 - t^2} dt &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{{}^{2}/_{a}}{(t+a)} - \frac{{}^{2}/_{a}}{(t-a)} dt \\
&= \left[\frac{2}{a}\ln|t+a| - \frac{2}{a}\ln|t-a|\right]_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{2}{a}\left(\left[\ln\left|{}^{1}/_{2} + a\right| - \ln\left|{}^{1}/_{2} - a\right|\right] \ominus \left[\ln\left|-{}^{1}/_{2} + a\right| - \ln\left|-{}^{1}/_{2} - a\right|\right]\right) \\
&\quad \textit{Rappel : } \left|-{}^{1}/_{2} - a\right| = \left|{}^{1}/_{2} + a\right| \textit{ et } \left|-{}^{1}/_{2} + a\right| = \left|{}^{1}/_{2} - a\right| \\
&= \frac{2}{a}\left(2\ln\left|{}^{1}/_{2} + a\right| - \ln\left|{}^{1}/_{2} - a\right|\right) \\
&= \frac{1}{a}\ln\frac{\left|{}^{1}/_{2} + a\right|}{\left|{}^{1}/_{2} - a\right|} \\
&\quad \textit{De plus } a > {}^{1}/_{2} \\
&= \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \frac{1}{2}}{a - \frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

3. Déterminer a, b tel que : $\forall\, t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ \dfrac{t^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2} = a + \dfrac{b}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2}$

   Pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a "facilement" :

$$\begin{aligned}
\frac{t^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2} &= \frac{t^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2} \\
&= -1 + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2}
\end{aligned}$$

   En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{t^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2} dt = v_n - v_{n+1}$

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1/2} \frac{t^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2} dt & \int_{-1/2}^{1/2} \left[-1 + \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2}\right] dt \\
&= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \ln\left(\frac{n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\right) \\
&= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = v_n - v_{n+1}
\end{aligned}$$

4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ n(n+1) \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - t^2$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$\begin{aligned}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2\right] - n(n+1) &= n^2 + n + \frac{1}{4} - t^2 - n^2 - n \\ &= \frac{1}{4} - t^2 \geqslant 0 \qquad \textit{car } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

En déduire : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant v_n - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'une part $v_n - v_{n+1} = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\frac{t^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2}}_{\geqslant 0\ sur[-1/2,1/2]}\, dt \geqslant 0$

Et d'autre part
$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{t^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - t^2}\, dt \\ &\leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \frac{t^2}{n(n+1)}\, dt \\ &\leqslant \frac{1}{n(n+1)} \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2} \\ &\leqslant \frac{1}{12}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

On vient de voir que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n \leqslant 0$

donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

On va montrer qu'elle est minorée.

On somme l'inégalité de la question Q4 de $k = 1$ à $k = n-1$,

Ainsi on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} [v_k - v_{k+1}] \leqslant \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]$

On télescope et on obtient : $v_1 - v_n \leqslant \frac{1}{12}\left[1 - \frac{1}{n}\right] \leqslant \frac{1}{12}$

Conclusion : On ré-organise ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant v_1 - \frac{1}{12}$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante et minorée donc elle converge vers ℓ

puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $K > 0$

On a $v_n = \ln(u_n)$ donc $u_n = e^{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\ell}$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $K = e^{\ell} > 0$

Conclusion : On a démontré que : $\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} K > 0$

Solution de l'exercice 6 (Énoncé)

1. Convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer que : Pour tout n, les nombres u_n et v_n existent.

   On montre par récurrence $H_{<n>}$: *les nombres u_n et v_n existent et sont positifs.*

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Pour tout $n \in^{\mathbb{N}}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sqrt{u_{n+1}v_n} - v_n \\ &= \frac{u_{n+1}v_n - (v_n)^2}{\sqrt{u_{n+1}v_n} + v_n} = \frac{v_n(u_{n+1} - v_n)}{\sqrt{u_{n+1}v_n} + v_n} = \frac{v_n(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n)}{\sqrt{u_{n+1}v_n} + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{2(\sqrt{u_{n+1}v_n} + v_n)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les signes dépendent du signe de } (v_n - u_n)}$$

   On démontre "facilement" par récurrence que : $H_{<n>} : 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

   Conclusion : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

   (c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |v_{n+1} - u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|v_n - u_n|$.

   Pour tout $n \in^{\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} |v_{n+1} - u_{n+1}| &= |\sqrt{u_{n+1}v_n} - u_{n+1}| \\ &= |\sqrt{u_{n+1}}\,(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_{n+1}})\,| \\ &= \left|\sqrt{u_{n+1}}\frac{v_n - u_{n+1}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}}\right| \\ &= \left|\frac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_{n+1}}}\right| \left|v_n - \frac{u_n + v_n}{2}\right| \\ &\leqslant \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{0 + \sqrt{u_{n+1}}}\ \left|\frac{v_n - u_n}{2}\right| = \frac{1}{2}\,|v_n - u_n| \end{aligned}$$

   (d) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

   On va montrer que les suites sont adjacentes.

   On a déjà les monotonies respectives

   De plus, "À la mode géo", on a que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |v_n - u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}\,|v_0 - u_0|$

   Conclusion : Le théorème des gendarme assure que $v_n - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, le suites sont adjacentes et donc convergent vers la même limite.

   Autre méthode possible.

   Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\forall\, n,\ u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$,

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ

   De même la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante et $\forall\, n,\ v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$,

   Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ'

   On OrdredeGrandere la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

   Conclusion : $\ell = \ell'$

2. On va calculer ℓ, la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer qu'il existe un un unique $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(\alpha) = {}^{u_0}/_{v_0}$

   La fonction Cosinus réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, 1[$

   Comme ${}^{u_0}/_{v_0} \in]0, 1[$, l'équation $\cos(X) = {}^{u_0}/_{v_0}$ admet une unique solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   (b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$ et $u_n = v_n \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

On fait par récurrence $H_{<n>}$: $v_n = v_0 \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$ et $u_n = v_n \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

Initialisation $n = 1$

On a : $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{v_0\ \cos(\alpha) + v_0}{2}$

$$= v_0 \frac{\cos(\alpha) + 1}{2} = v_0 \cos^2(\frac{\alpha}{2})$$

$$v_1 = \sqrt{u_1.v_0} = \sqrt{v_0 \cos^2(\frac{\alpha}{2}).v_0}$$

$$\left| v_0 \cos(\frac{\alpha}{2}) \right| = v_0 \cos(\frac{\alpha}{2}) = v_0 \prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)$$

Ainsi on a $u_1 = v_0 \cos^2(\frac{\alpha}{2}) = v_1\ \cos(\frac{\alpha}{2})$

Hérédité On suppose que $H_{<n>}$ est vraie

On suis la même démarche que l'initialisation

(c) On considère $p_n = v_n \times \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$.

Montrer que la suite (p_n) est géométrique.

En déduire une simplification du nombre v_n puis la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution de l'exercice 7 (Énoncé)
On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt \quad ET \quad b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos t)^n \ dt$$

1. Autour de la suite (a_n).
   (a) Calculer a_2. On a $a_0 = \frac{\pi}{2}$, $a_1 = 1$ et

   $$a_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 \, dt \quad \text{ET} \quad (\cos t)^2 = CC = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) = \frac{\cos(2t)+1}{2}$$

   (b) Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $> a_{n+1} - a_n = int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \, dt - int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt = int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos t)^n}_{\geqslant 0 \ sur \ [...]} \underbrace{(\cos(t)-1)}_{\leqslant 0 \ sur \ [...]} dt$

   Donc la suie (a_n) est dé-croissante

   $> a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos t)^n}_{\geqslant 0 \ sur \ [...]} \ dt$

   Donc la suie (a_n) est dé-croissante

   Conclusion : la suite (a_n) converge vers une limite $\ell \geqslant 0$

   (c) En écrivant $\cos^{n+2}(t) = \cos(t)\cos^{n+1}(t)$, montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n$

   On fait une IPP et en écrivant $C^{n+2} = C.C^{n+1}$, puis on utilise $S^2 = 1 - C^2$

   (d) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, a_{n+1} a_n = \dfrac{\pi}{2}$

   On fait une récurrence

   en déduire que : $\ell = 0$

   On fait un RA. On suppose que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell > 0$

   On Ordregrendere la relation $(n+1)\, a_{n+1} a_n = \dfrac{\pi}{2}$

2. Comparaison entre a_{2n} et b_{2n}.
   (a) Montrer que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t.$

   On étudie la fonction $h : t \longmapsto h(t) = \sin t - \dfrac{2}{\pi} t$

   (b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant b_{2n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(a_{2n} - a_{2n+2}).$

   $>$ Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

   $$\begin{aligned} & 0 \leqslant \frac{2}{\pi} t \leqslant \sin t \\ & \Longrightarrow t^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4} (\sin t)^2 \\ & \Longrightarrow t^2 (\cos t)^{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4} (\sin t)^2 (\cos t)^{2n} \end{aligned}$$

   $>$ On intègre l'inégalité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

   Ainsi $b_{2n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 (\cos t)^{2n} \ dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2}{4} (\sin t)^2 (\cos t)^{2n} \ dt$

   Puis on utilise $S^2 = 1 - C^2$

   (c) En déduire que : $\dfrac{b_{2n}}{a_{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant b_{2n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\left(a_{2n} - a_{2n+2}\right)$

$$\implies 0 \leqslant \frac{b_{2n}}{a_{2n}} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right) \qquad \textit{car } a_{2n>0}$$

$$\implies 0 \leqslant \frac{b_{2n}}{a_{2n}} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{2n+1}{2n}\right) \qquad \textit{D'après Q1c}$$

Comme $\dfrac{\pi^2}{4}\left(1 - \dfrac{2n+1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\pi^2}{4}(1-1) = \mathcal{O}$

on peut conclure avec le théorème des 2 gendarmes

3. Un joli résultat.

(a) Montrer que : $\forall\, n\mathbb{N},\ a_{2n+2} = (2n+1)(n+1)b_{2n} - (2n+2)(n+1)b_{2n+2}$

On fait une IPP

$$a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,(\cos t)^{2n+1}\ dt$$

On fait une autre IPP

$$\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)\,b_{2n} - (2n+2)\,b_{2n+2}$$

(b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{(n+1)^2} = 2\left(\dfrac{b_{2n}}{a_{2n}} - \dfrac{b_{2n+2}}{a_{2n+2}}\right)$

Par un calcul facile, on trouve

$$\frac{1}{(n+1)^2} = 2\left(\frac{b_{2n}}{a_{2n}} - \frac{b_{2n+2}}{a_{2n+2}}\right)$$

(c) On considère la suite (S_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Montrer que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\pi^2}{6}$

Avec un télescopage, on obtient que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2\frac{b_0}{a_0} - 2\frac{b_{2n}}{a_{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\frac{b_0}{a_0} - 0 = \frac{\pi^2}{6}$$