Exercice 1. BAC is back Polynésie 2011 (5 points sur 20)

Partie A On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B Dans cette partie, a désigne un entier naturel.
Les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On admettra le théorème suivant, dit petit théorème de Fermat
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p,
alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

1. Soit x un entier naturel.
   Démontrer que si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x \equiv a\ [133]$.
2. Une congruence.
   (a) On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
   Démontrer que $a^6 \equiv 1\ [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1\ [7]$.
   En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.
   (b) On suppose que a est un multiple de 7.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.
   (c) On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [19]$.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [133]$.

Partie C On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à $\mathcal{A}$, est codé puis décodé.

$>$ La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de $\mathcal{A}$, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r\ [133]$ avec $0 \leqslant r < 133$.
$>$ La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1\ [133]$ avec $0 \leqslant r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a\ [133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : $128 \quad 59$.
   Décoder ce message et lire le message.

Exercice 2. [Correction]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. on considère Q_n définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{C},\ Q_n\,(z) = \frac{1}{2i}\left[(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1}\right]$$

   (a) Un peu de calcul

      i. Justifier que Q_n est un polynôme de degré $2n$, déterminer son coefficient dominant.
         Calculer le coefficient de X^{2n-2}

      ii. Est ce que 0 est une racine du polynôme Q_n ?

      iii. Vérifier que le polynôme $Q_n(z)$ est pair, CàD $\forall\, n \in \mathbb{C},\ Q_n(-z) = Q_n(z)$

      iv. Montrer que : $Q_n(z) = \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\ k\ impair}}^{2n+1} [\cdots] = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p\, z^{2n-2p}$

   (b) Factorisation de Q_n.

      i. À l'aide des racines $(2n+1)$-ième de l'unité, déterminer les racines $r_1, r_2, ..., r_{2n}$ de Q_n
         Remarque/Rappel : le nombre de racine est égale au degré
         puis exprimer les racines $r_1, r_2, ...$ à l'aide de la fonction Tangente.

      ii. En utilisant la périodicité de la fonction Tangente, justifier que $r_{n+1} = -r_n$.
         On admettra les autres égalités, CàD $r_{n+2} = -r_{n-1}$,.....

         En déduire que :

$$Q_n(X) = (2n+1)\left(X^2 - (r_1)^2\right) .... \left(X^2 - (r_n)^2\right) \quad \text{avec } r_k = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

   (c) En regardant le coefficient de X^{2n-2} du polynôme Qn,

$$\text{montrer que : } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

2. Une limite très classique.

   (a) Montrer que : $\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad \sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$

      En déduire que : $\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\quad \dfrac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\tan^2(x)} + 1.$

   (b) On pose pour $n \geqslant 1,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

      i. A l'aide de l'encadrement précédent et de la question Q1c, construire un encadrement pour S_n.

      ii. En déduire que : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.   *Ce résultat a été démontrer par Euler en 1735*