Exo 1. Déterminer un équivalent

$$\frac{n^2\ln(n)-n\ln^2(n)}{n+\sqrt{n}\ln(n)},\qquad \frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2},\qquad 2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right),\qquad \sin\left(\frac{1}{2n}\right)-\tan\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

Correction

Rappel/Remarque méthodologique

> Si/lorsque qu'on repère le plus gros, on va "vite" et on écrit $G\left[1+o(1)\right]$

> Sinon on fait du FFG, puis on gère chaque facteur de $F\dfrac{H}{B}$

> Enfin on peut on peut factoriser le plus gros et utiliser les formules d'approximations linéaires.

$$\begin{aligned}\frac{n^2\ln(n)-n\ln^2(n)}{n+\sqrt{n}\ln(n)} &= \frac{n^2\ln(n)\left[1+o(1)\right]}{n\left[1+o(1)\right]}\\ &= n\ln(n)\left[1+o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2} &= \textit{Les 3 termes sont du même ordre grandeur, donc FFB}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)-2n(n+2)+n(n+1)}{n(n+1)(n+2)}\\ &\textit{On embellit le Haut}\\ &= \frac{n^2\left[1-2+1\right]+n\left[1+2-4+1\right]+\left[2\right]}{n(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{2}{n(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{2}{n.n\left[1+o(1)\right].n\left[1+o(1)\right]} = \frac{2}{n^3}\left[1+o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) &= 2^{n-1}\left[\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right]\\ &= \frac{2^n}{2}.\frac{\pi}{2n}\left[1+o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^n}{2}.\frac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{2n}\right)-\tan\left(\frac{2}{n^2}\right) &= \frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\left[\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{2}{n^2}\right)\right]\\ &\textit{Le plus gros des 4 termes c'est } \frac{\pi}{2n}\textit{, on a donc}\\ &= \frac{\pi}{2n}\left[1+o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+\end{aligned}$$

Exo 2. Démontrer que : $n^{41} \underset{n\to\infty}{=} o\left(10^n\right)$.Exemple de demo possible. On considère $u_n = \dfrac{n^{41}}{10^n}$

1. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du certain rang.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$
3. Montrer qu'il existe N_0 tq $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n$
4. Démontrer que $\ell = 0$

Correction

1. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$

   Rappel/Remarque méthodologique

   le nombre u_n s'exprime avec les expressions usuelles, ici $n^2, n^{41}, \sqrt{n}$ et $2^n, e^n, 10^n$

   Pour trouver un équivalent de u_{n+1} et de $u_{n+1} - u_n$,

   il est bon de réfléchir à ceux de $(n+1)^2, (n+1)^{41}, \sqrt{n+1}$ et $2^{n+1}, e^{n+1}, 10^{n+1}$

   $(n+1)^2 =$

   Et $u_{n+1} - u_n =$

   $(n+1)^{41} =$

   Et $u_{n+1} - u_n =$

   $\sqrt{n+1} =$

   Et $u_{n+1} - u_n =$

   $2^{n+1} =$

   Et $u_{n+1} - u_n =$

   $10^{n+1} =$

   Et $u_{n+1} - u_n =$

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^{41}}{10^{n+1}} - \frac{n^{41}}{10^n}$$

   On commence par FFB

   $$= \frac{1}{10^n}\left[\frac{(n+1)^{41} - 10.n^{41}}{10}\right]$$

   On embellit le Haut

   $$= \frac{1}{10^n}\left[\frac{\left(n^{41} + 41.n^{40} + ...\right) - 10.n^{41}}{10}\right]$$

   $$= \frac{1}{10^n}\left[\frac{-9.n^{41}\left[1 + o(1)\right]}{10}\right]$$

   $$= \frac{-9.n^{41}\left[1+o(1)\right]}{10.10^n}\left[1+o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-9.n^{41}}{10.10^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^-$$

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du certain rang.

   Comme $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^-$ et $0^- < 0$, on sait que $u_{n+1} - u_n$ devient < 0 à partir d'un certain rang

   Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du certain rang.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du certain rang.

   Et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^{41}}{10^n} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0

   Conclusion : Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$

3. Montrer qu'il existe N_0 tq $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n$

On considère $Q_n = \dfrac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n}$. On a

$$
\begin{aligned}
Q_n = \frac{u_{n+1}}{\frac{3}{4}u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{41}}{10^{n+1}}}{\frac{3}{4}\frac{n^{41}}{10^n}} &= \frac{4}{3}\frac{(n+1)^{41}}{n^{41}}\frac{10^n}{10^{n+1}} \\
&= \frac{4}{3.10}\frac{(n+1)^{41}}{n^{41}} \\
&= \frac{4}{3.10}\frac{n^{41}\left[1+o(1)\right]}{n^{41}} \\
&\frac{4}{3.10}\left[1+o(1)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{10} < 1
\end{aligned}
$$

J'applique la définition de $Q_u n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{4}{10}$ avec $\varepsilon = \dfrac{6}{10} > 0$

Ainsi il existe un rang N_0 tel que $\forall\, n \geqslant N_0,\ Q_n \leqslant \ell + \varepsilon = \dfrac{4}{10} + \dfrac{6}{10} = 1$

Conclusion : $\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n$

4. Démontrer que $\ell = 0$

On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$, CàD $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\ell \geqslant 0$

On va OrdreGranderer la relation $u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n$

$$
\left.
\begin{array}{c}
\forall\, n \geqslant N_0,\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4} u_n \\[2em]
u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\
\dfrac{3}{4} u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3}{4}\ell
\end{array}
\right\} \Longrightarrow \textit{"à la limite"}\ \ell \leqslant \frac{3}{4}\ell
$$

On ré-organise : $\ell \leqslant \dfrac{3}{4}\ell \iff \ell \leqslant 0$

Conclusion : $\ell \leqslant 0$ et $\ell \geqslant 0$ donc $\ell = 0$

Exo 3. Démontrer que : $\ln(n) \underset{n\to\infty}{=} o\left(n^2\right)$. Exemple de demo possible. On considère $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

1. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du certain rang.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$
3. Exprimer u_{2n} en fonction de u_n
4. Démontrer que $\ell = 0$

Correction

1. Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$

   Rappel/Remarque méthodologique

   le nombre u_n s'exprime avec les expressions usuelles, ici $n^2, n^{41}, \sqrt{n}$ et $\ln(n)$

   Pour trouver un équivalent de u_{n+1} et de $u_{n+1} - u_n$,

   il est bon de réfléchir à ceux de $(n+1)^2, (n+1)^{41}, \sqrt{n+1}$ et $\ln(n+1)$

   $(n+1)^2 =$

   Et $u_{n+1} - u_n =$

   $(n+1)^{41} =$

   Et $u_{n+1} - u_n =$

   $\sqrt{n+1} =$

   Et $u_{n+1} - u_n =$

   $\ln(n+1) =$

   Et $u_{n+1} - u_n =$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} - \frac{\ln(n)}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 \ln(n+1) - (n+1)^2 \ln(n)}{n^2 (n+1)^2}$$

On utilise ce que l'on a trouvé ci-dessus

$$= \frac{n^2 \left[\ln(n) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] - n^2 \ln(n) - 2n\ln(n) - \ln(n)}{n^2 (n+1)^2}$$

On embellit de Haut et on ré-ordonne et on hiérarchise

$$\underset{n\to\infty}{=} \frac{-2n\ln(n) + n + o(n) + "petit"}{n^2(n+1)^2}$$

$$\underset{n\to\infty}{=} \frac{-2n\ln(n)\left[1+o(1)\right]}{n^2\, n^2 \left[1+o(1)\right]} \underset{n\to\infty}{=} \frac{-2n\ln(n)}{n^4}\left[1+o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-2\ln(n)}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^-$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du certain rang.

Comme $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^-$ et $0^- < 0$, on sait que $u_{n+1} - u_n$ devient < 0 à partir d'un certain rang

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du certain rang.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dé-croissante à partir du certain rang.

   Et $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2} > 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0

   Conclusion : Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$

3. Exprimer u_{2n} en fonction de u_n

$$\text{On a } u_{2n} = \frac{\ln(2n)}{(2n)^2} = \frac{\ln(n)+\ln(2)}{4.n^2}$$
$$= \frac{1}{4}u_n + \frac{\ln(2)}{4n^2}$$

4. Démontrer que $\ell = 0$

On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geqslant 0$, CàD $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et $\ell \geqslant 0$

On va OrdreGranderer la relation $u_{2n} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{\ln(2)}{4n^2}$

$$\left.\begin{array}{r} u_{2n} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{\ln(2)}{4n^2} \\ \\ u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \\ \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{\ln(2)}{4n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{4}\ell + \mathscr{O} \end{array}\right\} \Longrightarrow \textit{"à la limite"}\ \ell = \frac{1}{4}\ell$$

On ré-organise : $\ell = \dfrac{1}{4}\ell \iff \ell \leqslant 0$

Conclusion : $\ell = 0$

Exo 4. Pour les suites suivantes :

Déterminer un équivalent de u_{n+1} et dire si : $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$

$u_n = n^2$, $u_n = n^{41}$, médium $u_n = \sqrt{n}$, médium $u_n = \ln(n)$, médium $u_n = 2^n$, Difficile $u_n = n^n$

Correction

$u_n = n^2$

> On a $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 \left[1 + o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} n^2$

On a donc : $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} n^2$ et $u_n = n^2$ Donc $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

> $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = \left[n^2 + 2n + 1\right] - n^2 = 2n + 1 \underset{n\to\infty}{=} 2n \left[1 + o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

conclusion : $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

$u_n = n^{41}$

> On a $u_{n+1} = (n+1)^{41} = \sum_{k=0}^{41} \binom{41}{k} n^k$

$$= \underbrace{n^{41}}_{k=41} + \underbrace{41\, n^{40}}_{k=40} + \cdots$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} n^{41} \left[1 + o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} n^{41}$$

On a donc : $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} n^{41}$ et $u_n = n^{41}$ Donc $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

> $u_{n+1} - u_n = (n+1)^{41} - n^{41} = \left[\underbrace{n^{41}}_{k=41} + \underbrace{41\, n^{40}}_{k=40} + \cdots\right] - x^{41}$

$$= 41\, n^{40} + \cdots \underset{n\to\infty}{\sim} 41\, n^{40} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

conclusion : $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

$u_n = \sqrt{n}$

> On a $u_{n+1} = \sqrt{n+1} = (n+1)^{1/2} = \left(n \left[1 + o(1)\right]\right)^{1/2}$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\left[1 + o(1)\right]}$$

$$= \sqrt{n} \left[1 + o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}$$

On a donc : $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et $u_n = \sqrt{n}$. Conclusion : $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.

$> u_{n+1}-u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{=} \sqrt{n}\left[1+o(1)\right]-\sqrt{n}$

$= \sqrt{n}\, o(1)$

$\underset{n\to\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\right)$

OUPS ce n'est pas l'équivalent

On repend et on factorise le plus gros

$= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}-\sqrt{n}$

$= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right)\right)-\sqrt{n}$

$= \sqrt{n}+\frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)-\sqrt{n}$

$= \frac{1}{2\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+$

conclusion : $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+$

$u_n=\ln(n)$

$>$ On a $u_{n+1}=\ln(n+1)=\ln\left(n\left[1+o(1)\right]\right)$

$= \ln(n)+\underbrace{\ln\left[1+o(1)\right]}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} ln(1)=0}$

$\underset{n\to\infty}{=} \ln(n)+o(1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$

On a donc : $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$ et $u_n=\ln(n)$ Conclusion : $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

$> u_{n+1}-u_n=\ln(n+1)-\ln(n) \underset{n\to\infty}{=} \left(\ln(n)+o(1)\right)-\ln(n)$

$= \ln(n)\, o(1)$

$\underset{n\to\infty}{=} o(\ln n)$

OUPS ce n'est pas l'équivalent

On repend et on factorise le plus gros

$= \ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(n)$

$\underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{n}\left[1+o(1)\right] \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+$

conclusion : $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+$

$u_n=2^n$

$> u_{n+1}=2^{n+1}=2.2^n$

Non u_{n+1} n'est pas équivalent à u_n !!!!!

Conclusion : u_{n+1} "est 2 fois plus rapide" que u_n !!!

$> u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n 2^n\,[2-1]=2.2^n$

Conclusion : $u_{n+1}-u_n=2.2^n \underset{n\to\infty}{\sim} 2.2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Ce qui est "délicat", c'est qu'il n'y a rien à faire sauf connaire le formulaire 18h, 19h,....!!!!!

$u_n = n^n$

> $u_{n+1} = (n+1)^{n+1} = \exp\Big((n+1)\ln(n+1)\Big)$

On sait que en factorisant le plus gros , on a $\ln(n+1) \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\underset{n\to\infty}{=} \exp\left((n+1)\left[\ln(n) + \frac{1}{n} + 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)$

On développe

$\underset{n\to\infty}{=} \exp\exp\Big(n\ln(n) + \ln(n) + 1 + o(1)\Big)$

$\underset{n\to\infty}{=} \exp(n\ln(n)).\exp(\ln(n))\,\underbrace{\exp[1+o(1)]}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e^1 = e}$

$= n^n\, n\, e\Big[1+o(1)\Big] \underset{n\to\infty}{\sim} e.n^n.n$

Conclusion : $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} n^n.n = e.n.u_n$.

u_{n+1} n'est pas équivalent à u_n mais infiniment plus grand que u_n

> $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{=} u_{n+1}\Big[1+o(1)\Big] \underset{n\to\infty}{=} e.n^n.n$ *car u_{n+1} est infiniment plus grand que u_n*

Conclusion : $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} e.n^n.n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$